Ⅱ－10　円弧アーチの振動に関する一考察

九州大学　教　授　山崎徳也
九州大学　大学院○崎山　毅

概要　円弧アーチの軸面内振動問題に関してはJ.P. Den Hartogがエネルギー法によってあらゆる中心角に対する2ヒンジアーチあるいは固定アーチの最低振動数を求めており、またF.W. Waltking[1]は微分方程式を用いて両端ヒンジの場合および両端固定の場合の固有振動数ならびに振動モードを厳密に求めている。本研究は円弧アーチ部材の振動撓角式の誘導を終局目的とする一連の考察の基礎的吟味として、Waltkingの厳密解がその複雑さのために実用に供し難い点を改良せんと試みたものであり中心角20°～120°の部材に限られるが本法によれば最低振動数のみならず高次の振動数およびその振動モードも比較的簡単に求められる。なお理論の簡明化のためにアーチ部材の断面は一定で軸半径にくらべて十分小さくまた曲げ振動にさいしては中立軸の伸縮はないものと仮定する。

記号　本文において用いる記号は次のとおりである。

φ：円周方向の極座標	ω：固有振動数
X：部材の単位長に働く半径方向外力	EI：曲げ剛性
Z：　〃　切線　〃	$\lambda^4=\omega^2\rho R^4/EI$
$\bar{M}$：振動中の部材の任意断面の曲げモーメント	$\bar{M}=M\sin\omega t$
$\bar{N}$：　〃　軸力	$\bar{N}=N\sin\omega t$
$\bar{Q}$：　〃　せん断力	$\bar{Q}=Q\sin\omega t$
v：　〃　切線方向変位	$v=V\sin\omega t$
w：　〃　半径　〃	$w=W\sin\omega t$
ϕ：　角変位	$\phi=\Phi\sin\omega t$
2β：円弧アーチの中心角	R：円弧アーチの軸半径
ρ：　〃　単位長当りの質量	

Ⅰ 面内荷重をうける円弧部材のたわみの微分方程式

円弧アーチ部材が面内荷重をうける場合の応力の平衡条件式は半径および切線方向の力のつりあいと曲げモーメントのつりあいを考えて次式となる。

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial\varphi}+\bar{N}+X\cdot R=0\qquad \frac{\partial \bar{N}}{\partial\varphi}-\bar{Q}+Z\cdot R=0\qquad \frac{\partial \bar{M}}{\partial\varphi}-\bar{Q}\cdot R=0 \tag{1}$$

また曲げモーメント$\bar{M}$　角変位ϕと切線,半径方向変位v, wとの関係は曲り梁の基礎理論より次式で与えられる。

$$\bar{M}=-\frac{EI}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)\qquad \phi=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}+v\right) \tag{2}$$

つぎに曲げ振動にさいしてアーチ部材の中立軸は伸縮しないとする仮定より次式を得る。

$$w=\frac{\partial v}{\partial\varphi} \tag{3}$$

式(1)～式(3)より切線方向変位vに関する次の微分方程式が求まる。

$$\frac{EI}{R^4}\left(\frac{\partial^6 v}{\partial\varphi^6}+2\frac{\partial^4 v}{\partial\varphi^4}+\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)=\frac{\partial X}{\partial\varphi}-Z \tag{4}$$

II 円弧アーチの自由振動の微分方程式

自由振動時に部材に働く荷重は慣性力のみであるからアーチ部材の単位長に働く半径および切線方向の外力X、Zは次式で与えられる。

$$X=-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\qquad\qquad Z=-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\tag{5}$$

式(5)を式(4)に代入して次式を得る。

$$\frac{EI}{R^4}\left(\frac{\partial^6 v}{\partial\varphi^6}+2\frac{\partial^4 v}{\partial\varphi^4}+\frac{\partial^2 v}{\partial^2\varphi}\right)+\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}-v\right)=0\tag{6}$$

ここで　$v=V(\varphi)\cdot\sin\omega t$　とおき式(6)に代入すれば円弧アーチ部材の自由振動の規準函数Vに関する微分方程式が次のごとく得られる。

$$\frac{d^6V}{d\varphi^6}+2\frac{d^4V}{d\varphi^4}+(1-\lambda^4)\frac{d^2V}{d\varphi^2}+\lambda^4\cdot V=0\qquad\qquad \lambda^4=\frac{\omega^2\rho R^4}{EI}\tag{7}$$

III 規準函数V(φ)に関する微分方程式の解

式(7)の解は　$\lambda^4>17.64$　の場合には

$$V(\varphi)=C_1\cosh a\varphi+C_2\sinh a\varphi+C_3\cosh b\varphi+C_4\sinh b\varphi+C_5\cos c\varphi+C_6\sin c\varphi\tag{8}$$

で表わされ定数a.b.cは次式を満足すべきものである。

$$a^6+2a^4+(1-\lambda^4)a^2+\lambda^4=0\qquad(a>0)$$
$$b^6+2b^4+(1-\lambda^4)b^2+\lambda^4=0\qquad(b>0)$$
$$c^6-2c^4+(1-\lambda^4)c^2-\lambda^4=0\qquad(c>0)$$

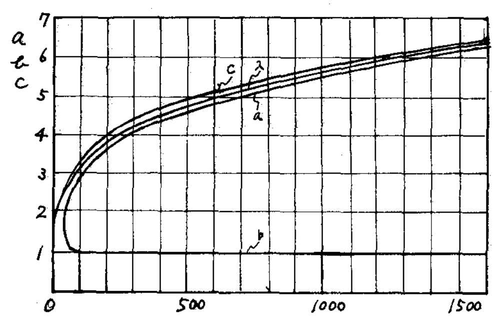

図-1

一方 Den Haltog がエネルギー法によって求めたλ^4の値によれば円弧アーチ部材の中心角が2ヒンジアーチで約145°,固定アーチで約180°以下であれば常に　$\lambda^4>17.64$　は成立することがわかる[2]。したがって本研究において取扱う円弧アーチ部材を中心角20°~120°に限定すれば規準函数Vは常に式(8)で与えられることになることはもちろんでありさらにa.b.cとλとの関係が図-1のごとくなりこれより次のごとく近似することができる。

$$a\fallingdotseq\lambda\qquad b\fallingdotseq 1\qquad c\fallingdotseq\lambda$$

$$V(\varphi)\fallingdotseq C_1\cosh\lambda\varphi+C_2\sinh\lambda\varphi+C_3\cosh\varphi+C_4\sinh\varphi+C_5\cos\lambda\varphi+C_6\sin\lambda\varphi\tag{9}$$

IV 振動数方程式と振動モード

〔1〕2ヒンジアーチの対称振動

2ヒンジアーチの対称振動の境界条件は

$\varphi=0$: $V=W=M=0$　　すなわち　$V(0)=V'(0)=V'''(0)=0$

$\varphi=\beta$: $V=\Phi=Q=0$　　すなわち　$V(\beta)=V''(\beta)=V^{(4)}(\beta)=0$

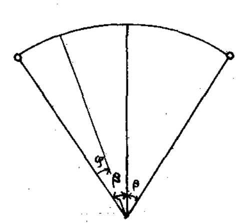

図-2

これらの条件より次の連立方程式を得る。

$$C_1+C_3+C_5=0\tag{i}$$
$$\lambda C_2+C_4+\lambda C_6=0\tag{ii}$$
$$\lambda^3C_2+C_4-\lambda^3C_6=0\tag{iii}$$
$$(C_1\cosh\lambda\beta+C_2\sinh\lambda\beta)+(C_3\cosh\beta+C_4\sinh\beta)+(C_5\cos\lambda\beta+C_6\sin\lambda\beta)=0\tag{iv}$$

$$\lambda^2(C_1\cosh\lambda\beta+C_2\sinh\lambda\beta)+(C_3\cosh\beta+C_4\sinh\beta)-\lambda^2(C_5\cos\lambda\beta+C_6\sin\lambda\beta)=0 \qquad (\mathrm{V})$$

$$\lambda^4(C_1\cosh\lambda\beta+C_2\sinh\lambda\beta)+(C_3\cosh\beta+C_4\sinh\beta)+\lambda^4(C_5\cos\lambda\beta+C_6\sin\lambda\beta)=0 \qquad (\mathrm{VI})$$

(IV)(V)(VI)式が連立するためには

$$C_1\cosh\lambda\beta+C_2\sinh\lambda\beta=0 \qquad C_3\cosh\beta+C_4\sinh\beta=0 \qquad C_5\cos\lambda\beta+C_6\sin\lambda\beta=0 \qquad (10)$$

(10)の各式を(i)に代入して C_1, C_3, C_5 を消去し(ii)(iii)と組み合せて C_2, C_4, C_6 に関する連立方程式を求めれば同時に0ではない C_2, C_4, C_6 が存在するための条件として次式を得る。

$$(\lambda^2+1)\tanh\lambda\beta-2\lambda^3\tanh\beta+(\lambda^2-1)\tan\lambda\beta=0 \qquad (11)$$

すなわち式(11)が2ヒンジアーチの対称振動の振動数方程式である。さらに $V(\varphi)$ を求めれば

$$V(\varphi)=K\left[-\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}(\tanh\lambda\beta\cdot\cosh\lambda\varphi-\sinh\lambda\varphi)+\frac{2\lambda^3}{\lambda^2-1}(\tanh\beta\cdot\cos\varphi-\sinh\varphi)-(\tan\lambda\beta\cdot\cos\lambda\varphi-\sin\lambda\varphi)\right]$$

[2] 2ヒンジアーチの逆対称振動

境界条件は $V(0)=W(0)=M(0)=0$ の他に $\varphi=\beta$ において半径方向の変位がなく切線方向の変位が最大でまた弾性曲線の変曲点となるなどの条件から

$$V(\beta)=V'(\beta)=W''(\beta)=0 \qquad \text{すなわち} \qquad V'(\beta)=V'''(\beta)=V^{(5)}(\beta)=0$$

ただしこの場合 $W(\varphi)$ に関して微小項をも含めた厳密式

$$W(\varphi)=\frac{dV}{d\varphi}-\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{d^3V}{d\varphi^3}+\frac{d^5V}{d\varphi^5}\right) \qquad \alpha=\left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad r:2\text{次半径}$$

を用いた。次にその結果を示す。

$$(\lambda^2+1)\coth\lambda\beta-2\lambda^3\coth\beta-(\lambda^2-1)\cot\lambda\beta=0$$

$$V(\varphi)=K\left[-\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}(\coth\lambda\beta\cdot\cosh\lambda\varphi-\sinh\lambda\varphi)+\frac{2\lambda^3}{\lambda^2-1}(\coth\beta\cdot\cosh\varphi-\sinh\varphi)+(\cot\lambda\beta\cdot\cos\lambda\varphi-\sin\lambda\varphi)\right]$$

[3] 固定アーチの対称振動

境界条件と結果のみ示せば次のごとし。

$$\varphi=0:\ V=W=\Phi=0 \qquad \therefore\ V(0)=V'(0)=V''(0)=0$$

$$\varphi=\beta:\ V=\Phi=Q=0 \qquad \therefore\ V(\beta)=V''(\beta)=V^{(4)}(\beta)=0$$

$$(\lambda^2+1)\coth\lambda\beta-2\lambda\coth\beta+(\lambda^2-1)\cot\lambda\beta=0$$

$$V(\varphi)=K\left[\frac{\lambda^2+1}{2\lambda^2}(\coth\lambda\beta\cdot\sinh\lambda\varphi-\cosh\lambda\varphi)-(\coth\beta\cdot\sinh\varphi-\cosh\varphi)+\frac{\lambda^2-1}{2\lambda^2}(\cot\lambda\beta\cdot\sin\lambda\varphi-\cos\lambda\varphi)\right]$$

[4] 固定アーチの逆対称振動

境界条件と結果のみ示せば次のごとし。

$$\varphi=0:\ V=W=\Phi=0 \qquad \therefore\ V(0)=V'(0)=V''(0)=0$$

$$\varphi=\beta:\ W=V'=W''=0 \qquad \therefore\ V'(\beta)=V'''(\beta)=V^{(5)}(\beta)=0$$

$$(\lambda^2+1)\tanh\lambda\beta-2\lambda\tanh\beta-(\lambda^2-1)\tan\lambda\beta=0$$

$$V(\varphi)=K\left[\frac{\lambda^2+1}{2\lambda^2}(\tanh\lambda\beta\cdot\sinh\lambda\varphi-\cosh\lambda\varphi)-(\tanh\beta\cdot\sinh\varphi-\cosh\varphi)-\frac{\lambda^2-1}{2\lambda^2}(\tan\lambda\beta\cdot\sin\lambda\varphi-\cos\lambda\varphi)\right]$$

V 数値計算

以上求めた4種の振動数方程式を用いて20°〜120°の中心角をもつ2ヒンジアーチおよび固定アーチの各次数の固有振動数を知ることができる。

それぞれの中心角に対応する低次の自由振動のλを求めれば図-3のごとくなる。

また中心角が60°のときの振動モードを一例として図示すれば図-4となる。

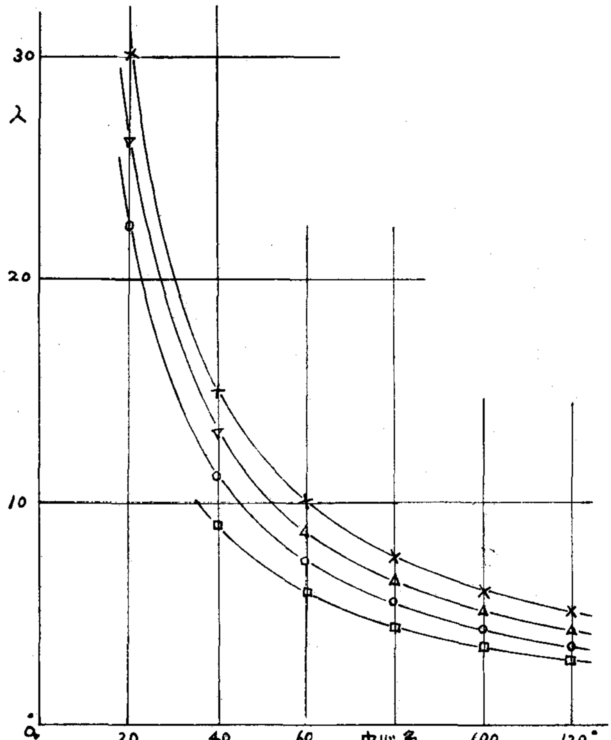

図-3

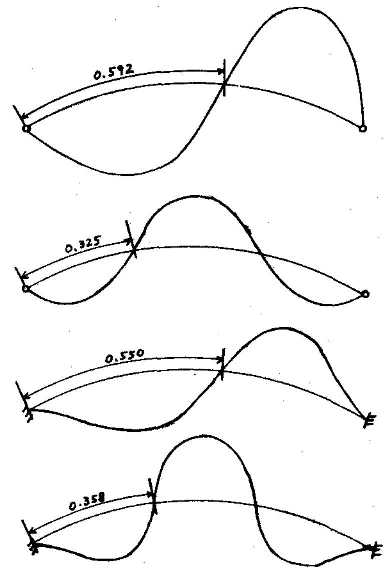

図-4

結語

本法の振動数方程式によって求めた最低次のλ値をエネルギー法によるDen Haltogのそれと比較すれば中心角の小さい場合は一致する。両者の差異が最も大である中心角120°のときには本法によるλ値はエネルギー法によるλ値よりも両端ヒンジで6.8%両端固定で3.8%大きい。途中中心角が大きくなるにつれて差異が大きくなるのは式(9)の近似性に由来するもので(図-1,3参照)この程度の差であれば実用上ほとんど支障ないものと考えられ式(8)を式(9)で近似できることの確証に帰しうる。この近似により計算量はいちじるしく軽減されさらに円弧部材の振動撓角式の誘導も可能となるのである。

参考文献

(1) F.W. Waltking Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern Ing. Arch. Bd 5 (1934) S 429～449

(2) 松平精 基礎振動学 昭和28年 P. 258～262