II－9　エネルギー法による固定アーチの弾塑性解析

九州大学　教　授　山崎徳也
九州大学　大学院　石川信隆
九州大学　学　生○黒木健実

1　緒　言

著者らは先に弾塑性領域における曲げモーメントと軸方向力との影響を考慮した2ヒンジ円孤アーチのたわみ[1]を弾性曲線法を用いて厳密に考察したが，本論文ではエネルギー法により矩形等断面をもつ円孤アーチの弾塑性基本式を誘導し，固定アーチを対象として弾塑性解析を行った。その手法は塑性ヒンジの発生により円孤アーチをそのヒンジ点で分割する必要が生ずるため，演算当初よりヒンジ発生予想位置すなわち最大応力点で分割しておけば解析上便利である点を考慮し，通常のせり高をもつ円孤固定アーチ（半開角30°～90°）を2～4ヶの扁平円孤アーチ（半開角10°～30°）に分割して，その分割点で変形法[2]に基づく節点の曲げモーメントおよび力の釣合式ならびにたわみとたわみ角の連続条件式を用いて，分割点の不静定量を逐次近似法により算定することとした。

2　円孤アーチの基本式

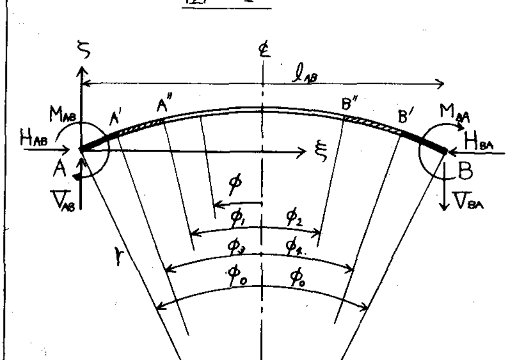
弾塑性領域における曲げモーメントと軸力とを考慮した精密エネルギー式[3]は次式で表わされる。

$$U=\frac{M_y^2}{2EI}\int_E\left(m^2+3n^2\right)ds+\frac{M_y^2}{2EI}\int_{P_1}\left[3(n-1)+\frac{8(1-n)^3}{3(1-n)-m}\right]ds+\frac{M_y^2}{2EI}\int_{P_2}\left(3-2\sqrt{3-3n^2-2m}\right)ds \quad \text{----(1)}$$

ここにEI：曲げ剛性，$m=M/M_y$，$n=N/N_y$，M_yおよびN_yは降伏曲げモーメントおよび降伏軸力，ds：微少軸長，積分記号E，P_1，P_2はそれぞれ弾性領域，第1弾塑性領域，第2弾塑性領域の長さを示す。

いま図－1に示す弾塑性円孤アーチ部材ABを考え，両端A，Bに第1弾塑性領域A′A″，B′B″および第2弾塑性領域AA′，BB′が生ずるものとすれば，エネルギー式は式(1)より次のごとくなる。

図－1



$$\frac{2EI}{rM_y^2}U=\int_{-\phi_1}^{\phi_2}\left(m^2+3n^2\right)d\phi+\int_{-\phi_3}^{-\phi_1}\left[3(n-1)+\frac{8(1-n)^3}{3(1-n)-m}\right]d\phi+\int_{\phi_2}^{\phi_4}\left[3(n-1)+\frac{8(1-n)^3}{3(1-n)-m}\right]d\phi+\int_{-\phi_0}^{-\phi_3}\left(3-2\sqrt{3-3n^2-2m}\right)d\phi$$

$$+\int_{\phi_4}^{\phi_0}\left(3-2\sqrt{3-3n^2-2m}\right)d\phi \quad \text{---------(2)}$$

任意点の曲げモーメントおよび軸力は図−1より一般に次のように表わせる。

$$M=\frac{l_{AB}-\xi}{l_{AB}}M_{AB}-\frac{\xi}{l_{AB}}M_{BA}-\zeta H_{AB}+M^{\circ}_{AB}$$

$$N=H_{AB}\cos\phi-V_{AB}\sin\phi+N^{\circ}_{AB}$$

ただし　$\xi=r(\sin\phi+\sin\phi_0)$, $\zeta=r(\cos\phi-\cos\phi_0)$, r：半径，M°_{AB}, N°_{AB}はそれぞれ単純アーチばりの荷重による任意点のモーメントおよび軸力を表わす。

しかるに扁平アーチを取り扱うゆえ軸力はその水平反力で近似できる。ここで式(2)に変分原理を適用して両端の切線角τ_A, τ_Bおよび部材の伸縮Δlを求めた後，$\tau_A=\theta_{AB}-R$, $\tau_B=\theta_{BA}-R$の置換を行えば基本式は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\theta_{AB}-R&=\frac{M_y r}{EI}D_{AB}\\ \theta_{BA}-R&=\frac{M_y r}{EI}F_{AB}\\ \Delta l&=\frac{M_y r}{EI}G_{AB}\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

ここに式(3)のD_{AB}, F_{AB}, G_{AB}は扁平アーチの形状（半開角ϕ_0），M_{AB}, M_{BA}, H_{AB}, M°_{AB}およびϕ_j（$j=1,2,3,4$）の函数であり表−1に示す内容をもち，Simpson 公式による数値積分を行う。

表−1

D_{AB}	$\int_{-\phi_1}^{\phi_2} m\frac{l-\xi}{l}d\phi+\int_{-\phi_3}^{-\phi_1} f_1(\phi)\frac{l-\xi}{l}d\phi+\int_{\phi_2}^{\phi_4} f_1(\phi)\frac{l-\xi}{l}d\phi+\int_{-\phi_0}^{-\phi_3} f_2(\phi)\frac{l-\xi}{l}d\phi+\int_{\phi_4}^{\phi_0} f_2(\phi)\frac{l-\xi}{l}d\phi$
F_{AB}	$-\int_{-\phi_1}^{\phi_2} m\frac{\xi}{l}d\phi-\int_{-\phi_3}^{-\phi_1} f_1(\phi)\frac{\xi}{l}d\phi-\int_{\phi_2}^{\phi_4} f_1(\phi)\frac{\xi}{l}d\phi-\int_{-\phi_0}^{-\phi_3} f_2(\phi)\frac{\xi}{l}d\phi-\int_{\phi_4}^{\phi_0} f_2(\phi)\frac{\xi}{l}d\phi$
G_{AB}	$-\int_{-\phi_1}^{\phi_2} m\zeta d\phi-\int_{-\phi_3}^{-\phi_1} f_1(\phi)\zeta d\phi-\int_{\phi_2}^{\phi_4} f_1(\phi)\zeta d\phi-\int_{-\phi_0}^{-\phi_3} f_2(\phi)\zeta d\phi-\int_{\phi_4}^{\phi_0} f_2(\phi)\zeta d\phi$ $-k\int_{\phi_2}^{\phi_4} f_3(\phi)\cos\phi\,d\phi-3k\int_{-\phi_0}^{-\phi_3} f_3(\phi)n\cos\phi\,d\phi+3k\int_{\phi_4}^{\phi_0} f_2(\phi)n\cos\phi\,d\phi-k\int_{-\phi_3}^{-\phi_1} f_3(\phi)\cos\phi\,d\phi$ $+3k(\sin\phi_3+\sin\phi_4)$　　ただし l は l_{AB} のことである
	$f_1(\phi)=4(1-n)^3/\{3(1-n)-m\}^2$　　$f_2(\phi)=1/\sqrt{3-3n^2-2m}$ $f_3(\phi)=12(1-n)^2\{2(1-n)-m\}/\{3(1-n)-m\}^2$

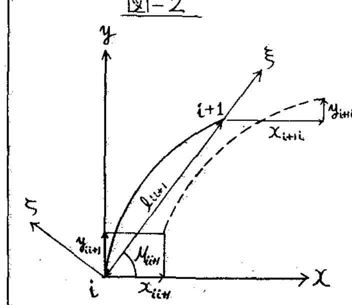
3. 固定アーチの弾塑性解析

式(3)の扁平アーチ部材の基本式を用いて2ヶないし最高十ヶまでの扁平アーチを多円弧状に連結すれば，通常のせり高をもつ固定アーチの弾塑性解析が可能となるが，その解析手法は弾性解析に慣用の変形法に準ずればよい。すなわち図−2より部材角Rおよび部材伸縮Δlは水平および垂直変位の函数として次のように表わせる。

$$R=\left[(x_{i+1i}-x_{ii+1})\sin\mu_{ii+1}-(y_{i+1i}-y_{ii+1})\cos\mu_{ii+1}\right]/l_{ii+1}$$

$$\Delta l=(x_{ii+1}-x_{i+1i})\cos\mu_{ii+1}+(y_{ii+1}-y_{i+1i})\sin\mu_{ii+1}$$

図−2



これを式(3)に代入した後，図−3に示す部材$\widehat{i\!-\!1,i}$および$\widehat{i,i\!+\!1}$に適用すれば，基本式はそれぞれ次式となる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\theta_{ii-1} &= \theta_{i-1i} - \frac{M_y r}{EI}\left(D_{i-1i} - F_{i-1i}\right) \\
x_{ii-1} &= x_{i-1i} - \theta_{i-1i}\, l_{i-1i} \sin\mu_{i-1i} - \frac{M_y r}{EI}\left(l_{i-1i} D_{i-1i} \sin\mu_{i-1i} + G_{i-1i} \cos\mu_{i-1i}\right) \\
y_{ii-1} &= y_{i-1i} - \theta_{i-1i}\, l_{i-1i} \cos\mu_{i-1i} + \frac{M_y r}{EI}\left(l_{i-1i} D_{i-1i} \cos\mu_{i-1i} - G_{i-1i} \sin\mu_{i-1i}\right) \\
\theta_{ii+1} &= \theta_{i+1i} + \frac{M_y r}{EI}\left(D_{ii+1} - F_{ii+1}\right) \\
x_{ii+1} &= x_{i+1i} - \theta_{i+1i}\, l_{ii+1} \sin\mu_{ii+1} + \frac{M_y r}{EI}\left(l_{ii+1} F_{ii+1} \sin\mu_{ii+1} + G_{ii+1} \cos\mu_{ii+1}\right) \\
y_{ii+1} &= y_{i+1i} + \theta_{i+1i}\, l_{ii+1} \cos\mu_{ii+1} - \frac{M_y r}{EI}\left(l_{ii+1} F_{ii+1} \cos\mu_{ii+1} - G_{ii+1} \sin\mu_{ii+1}\right)
\end{aligned}
\right\} \cdots\cdots\cdots (4)
$$

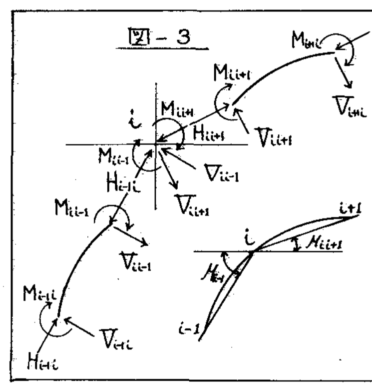
一方任意点iのたわみ角およびたわみの連続条件式は次式であたえられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\theta_{ii-1} &= \theta_{ii+1} \\
x_{ii-1} &= x_{ii+1} \\
y_{ii-1} &= y_{ii+1}
\end{aligned}
\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)
$$

また力の釣合式は図－3より次式となる。

$$
\begin{aligned}
&M_{ii-1} + M_{ii+1} + M_i^e = 0 \\
&H_{ii-1}\cos\mu_{i-1i} - H_{ii+1}\cos\mu_{ii+1} + (M_{i-1i} + M_{ii-1})\sin\mu_{i-1i} / l_{i-1i} \\
&-(M_{ii+1} + M_{i+1i})\sin\mu_{ii+1} / l_{ii+1} - V_{ii-1}^{\circ}\sin\mu_{i-1i} + V_{ii+1}^{\circ}\sin\mu_{ii+1} + H_i^e = 0 \\
&H_{ii-1}\sin\mu_{i-1i} - H_{ii+1}\sin\mu_{ii+1} - (M_{i-1i} + M_{ii-1})\cos\mu_{i-1i} / l_{i-1i} \\
&+(M_{ii+1} + M_{i+1i})\cos\mu_{ii+1} / l_{ii+1} + V_{ii-1}^{\circ}\cos\mu_{i-1i} - V_{ii+1}^{\circ}\cos\mu_{ii+1} + V_i^e = 0
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$



図－3

ここにM_i^e, H_i^e, V_i^eはそれぞれi点に作用する外力の曲げモーメント，水平力および鉛直力であり，V_{ii-1}°, V_{ii+1}°はそれぞれ部材$\widehat{i-1,i}$および$\widehat{i,i+1}$に働らく中間荷重によるi点のせん断力である。

さらに塑性領域を示すパラメーターϕ_1, ϕ_2などに対しては弾塑性境界条件(3)より次のごとく表わせる。

$$
\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin\phi_1}{\sin\phi_0}\right) m_{ii+1} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin\phi_1}{\sin\phi_0}\right) m_{i+1i} - r(\cos\phi_1 - \cos\phi_0)\, h_{ii+1}/k + m_{ii+1}^{\circ} = 1 - n
$$

$$
\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin\phi_3}{\sin\phi_0}\right) m_{ii+1} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin\phi_3}{\sin\phi_0}\right) m_{i+1i} - r(\cos\phi_3 - \cos\phi_0)\, h_{ii+1}/k + m_{ii+1}^{\circ} = 1 + n - 2n^2
$$

ただし$k = M_y / N_y$, $m_{ii+1}^{\circ} = M_{ii+1}^{\circ} / M_y$, $n = h_{ii+1}$ である。

ここに両端の固定条件として両端の水平，垂直変位およびたわみ角を0にすれば，未知数の数と方程式の数が同数となり，収斂計算を行えば所要のモーメント，軸力および弾塑性範囲が求まることになる。

4 例 題

図－4に示すごとき固定アーチの中央点に集中荷重Pが作用するときの弾塑性解析を中央で分割して行った。

分割点1において対称条件より

$$\left.\begin{aligned}\theta_{10} &= 0\\ \chi_{10} &= 0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

次に $i=1$ を式(4)に代入し，しかる後に点0の θ_{01}, χ_{01} および y_{01} を0とおけば次式をうる。

$$\left.\begin{aligned}\theta_{10} &= -\frac{M_y r}{EI}\left(D_{01}-F_{01}\right)\\ \chi_{10} &= -\frac{M_y r}{EI}\left(\frac{1}{2}l\tan\frac{1}{2}\phi_0\cdot D_{01}+G_{01}\cos\frac{1}{2}\phi_0\right)\\ y_{10} &= \frac{M_y r}{EI}\left(\frac{1}{2}l\,D_{01}-G_{01}\sin\frac{1}{2}\phi_0\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots (8)$$

式(7)に式(8)を代入して次の連立方程式をうる。

$$\left.\begin{aligned}&D_{01}-F_{01}=0\\ &\frac{1}{2}l\,D_{01}\tan\frac{1}{2}\phi_0+G_{01}\cos\frac{1}{2}\phi_0=0\\ &y_{10}=\frac{M_y r}{EI}\left(\frac{1}{2}l\,D_{01}-G_{01}\sin\frac{1}{2}\phi_0\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots (9)$$

分割点1における鉛直方向の力の釣合式は

$$H_{01}\sin\frac{1}{2}\phi_0-\frac{2}{l}\left(M_{01}+M_{10}\right)\cos^2\frac{1}{2}\phi_0-\frac{1}{2}P=0$$

となり，これを M_y で割って無次元化すれば

$$l\frac{h_{01}}{\tilde{h}}\sin\frac{1}{2}\phi_0-2\left(m_{01}+m_{10}\right)\cos^2\frac{1}{2}\phi_0-\frac{1}{2}\mathbb{P}=0 \quad (10)$$

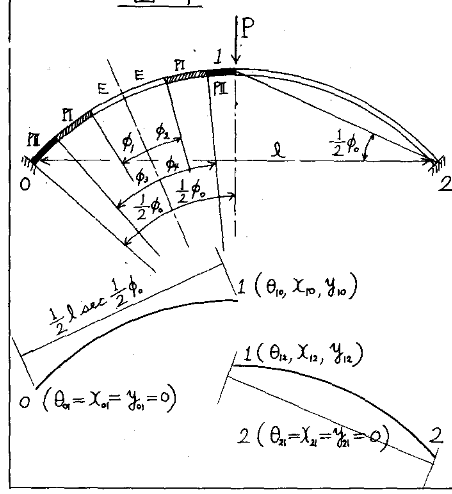
となる。ただし $\mathbb{P}=Pl/M_y$

さらに図－4のごとく弾塑性領域が生じたものとすれば，弾塑性境界条件式は次のごとく表わせる。

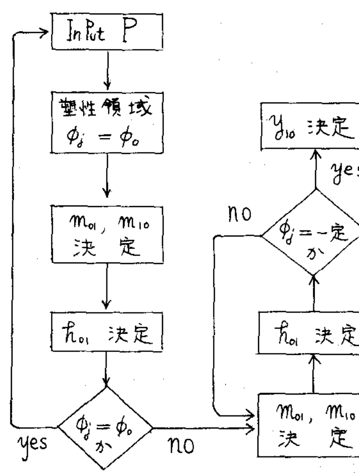
$$\left.\begin{aligned}m(-\phi_1)&=m(\phi_2)=1-n\\ m(-\phi_3)&=m(\phi_4)=1+n-2n^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots (11)$$

ここで式(9),式(10),式(11)を用いた計算過程を表－2に示す。

図－4



表－2



5　結　語

本論文は円弧固定アーチの弾塑性解析が数値積分に基づく逐次近似法により可能となることを示したもので，電子計算機の発達した現在では，上記誘導の基本式を用いてさらに未知数の多い連続アーチにも適用可能となる。

参考文献

(1) 山崎・石川：2ヒンジアーチの弾塑性たわみ，昭和40年5月，第20回年次学術講演会講演概要

(2) T. YAMASAKI：Analysis of Semi-Rigid Frame with Curved Members considering the Effect of Rigid Joint-width, Proc. of the 12th Japan National Congress for Appl. Mech. March, 1963

(3) 山崎・石川：弾塑性解析に用いる変形法の基本式の誘導，昭和40年度 土木学会西部支部研究発表会論文集