

II - 8 弾性固定アーチの応力の挙動特性

—— 円弧等厚アーチの場合 ——

熊本大学 工学部 正員 三池 亮 次

1. まえがき

弾性固定されたアーチダムのアーチ要素やコンクリートアーチ橋の応力の挙動特性の追求は、アーチの形状設計の上からも、また実測資料によるアーチの応力ないしたわみの挙動を解析する上からも不可欠である。弾性固定アーチにおける断面力ないし応力の挙動に関する研究は *Lieurance*¹⁾, 林ら²⁾によって等厚円弧アーチに対して行われた。いずれも基礎が *Vogt* の理論に従い弾性変形をし、*Lieurance* はコンクリートと基礎岩盤の弾性係数の比 $\frac{E_s}{E_r}=1$ の場合の断面力を、林は $\frac{E_s}{E_r}$ をいろいろに変えた場合の水圧荷重を受けるアーチ断面力および応力の挙動と、 $\frac{E_s}{E_r}=1$ の場合の温度荷重を受けるアーチの断面力および応力の挙動を追求したものである。

本文は等厚円弧アーチに対して温度荷重および水圧荷重が作用する場合の温度荷重による引張応力を除去する方法を追求する立場から、 $\frac{E_s}{E_r}$ をいろいろに変えた場合の水圧荷重および温度荷重を受けるアーチの応力の挙動特性を考察し、堤体平均温度および温度勾配の変化量が堤体厚さに逆比例する性質を利用して、温度荷重による引張応力を除去するための限界水圧荷重の、厚さ半径比 $\frac{T}{r}$, 中心角 2ϕ , $\frac{E_s}{E_r}$ などの諸因子との関係を考察した。あわせて弾性固定アーチの弾性方程式を仮想仕事の原理から誘導することによっていわゆるアーチ常数の意義を明らかにすると共に、アーチ常数が作る *flexibility* マトリクスの対称性が弾性固定アーチにおけるマクスウェルの定理を意味することを述べた。

なお、円弧等厚アーチはわが国におけるアーチダムの建設の初期の段階において採用されたものであるが、その構造がきわめて単純であることからその他の形式のアーチの応力特性を解析する上の基本となるものでここに取り上げた次第である。

2. 弾性固定アーチの理論

弾性固定アーチの理論は、コンクリートアーチ橋についてはたとえばストラスナーによって、アーチダムのアーチ要素に対しては *Bureau of Reclamation*¹⁾ によって開発されている。前者は基礎に不静定力をとるが、後者はアーチの内部に不静定力ととり、アーチ要素の微小部分の断面力による変形を積分し、不静定力作用点において両断されたアーチのその作用点における各変形を等しくおくことによって誘導されたものである。

ここではまず *Bureau of Reclamation* の立場に立ち、仮想仕事の原理から弾性方程式の誘導を試みた。すなわち M_0 , H_0 , V_0 をアーチのクラウンにおける曲げモーメント、スラスト、剪断力とし、 $\delta_{i,j}$, $r\delta_{i,j}$ をクラウンにおいて両断された左右の静定基本系のクラウンにおいて j なる荷重が作用したとき i の荷重方向の変位を表わすものとする。ただし添字 $i, j=1, 2, 3$ はおのおのクラウンにおける単位の曲げモーメント、スラスト、剪断力を表わし、内弧側に引張応力が発生するような曲げモーメントと剪断力、および圧縮スラストと、各荷重方向の変位を正にとる。しかるときクラウンにおける正の単位の曲げモーメント、スラスト、剪断力によるアーチの任意の断面における曲げモーメン

ト、スラスト、剪断力、 m_i, h_i, v_i ($i=1, 2, 3$) は

$$\begin{bmatrix} m_1 & h_1 & v_1 \\ m_2 & h_2 & v_2 \\ m_3 & h_3 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & \cos\phi & \sin\phi \\ x & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \text{----- (1)}$$

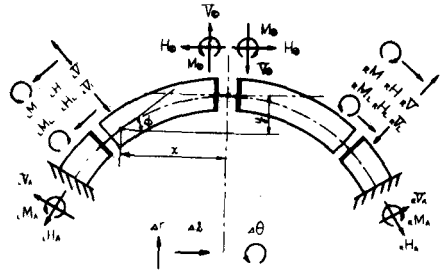


図-1 アーチにおける正の諸断面力

同様にアバットメントにおける断面力 $m_{A,i}, h_{A,i}, v_{A,i}$ 、およびアバットメントにおける各断面力方向の変位、 $\Delta\theta_{A,i}$ 、 $\Delta\delta_{A,i}, \Delta\gamma_{A,i}$ ($i=1, 2, 3$) は

$$\begin{bmatrix} m_{A1} & h_{A1} & v_{A1} \\ m_{A2} & h_{A2} & v_{A2} \\ m_{A3} & h_{A3} & v_{A3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y_A & \cos\phi_A & \sin\phi_A \\ x_A & -\sin\phi_A & \cos\phi_A \end{bmatrix} \quad \text{----- (2)}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta_{A1} & \Delta\delta_{A1} & \Delta\gamma_{A1} \\ \Delta\theta_{A2} & \Delta\delta_{A2} & \Delta\gamma_{A2} \\ \Delta\theta_{A3} & \Delta\delta_{A3} & \Delta\gamma_{A3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha_2 \\ (\alpha y_A + \alpha_2 \sin\phi_A) & \beta \cos\phi_A & (\alpha_2 y_A + \delta \sin\phi_A) \\ (\alpha x_A + \alpha_2 \cos\phi_A) & -\beta \sin\phi_A & (\alpha_2 x_A + \delta \cos\phi_A) \end{bmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

ここに $\alpha, \beta, \alpha_2, \delta$ はいわゆる Voigt の岩盤常数である。したがって仮想仕事の原理を基礎の変形にまで拡張すれば、たとえば左側アーチのクラウンにおける単位の剪断力による左接線方向の変位は、

$$\begin{aligned} \Delta\delta_{z,3}^{\odot} &= \int_0^{\delta_A} \frac{x y}{E_c I} d\delta - \int_0^{\delta_A} \frac{\sin\phi \cos\phi}{E_c A} d\delta + \int_0^{\delta_A} \kappa \frac{\sin\phi \cos\phi}{G_c A} d\delta \\ &\quad + y_A (\alpha x_A + \alpha_2 \cos\phi_A) - \cos\phi_A \beta \sin\phi_A + \sin\phi_A (\alpha_2 x_A + \delta \cos\phi_A) = \Delta\delta_{z,3}^{\odot} \quad \text{----- (4)} \end{aligned}$$

ここに A はアーチの断面積、 G_c はコンクリートの剪断弾性係数である。また静定基本系に外荷重が作用したときのアーチの任意断面またはアバットメントにおける断面力または変位は、左付添字、 $\odot, \oplus$ によって水圧荷重、温度荷重を表わし、水圧荷重による断面力 M_L, H_L, V_L の正の方向を図-1 のとおりとし、かつ $\Delta t, \alpha, c$ によって堤体平均温度上昇、温度勾配およびコンクリートの膨脹係数を表わすものとすれば、

$$\begin{bmatrix} \odot m & \odot h & \odot v \\ \oplus m_A & \oplus h_A & \oplus v_A \\ \odot \Delta\theta & \odot \Delta\delta & \odot \Delta\gamma \\ \oplus \Delta\theta & \oplus \Delta\delta & \oplus \Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_L & H_L & -V_L \\ -M_{LA} & H_{LA} & -V_{LA} \\ (-\alpha M_{LA} - \alpha_2 V_{LA}) & \beta H_{LA} & (-\alpha_2 M_{LA} - \delta V_{LA}) \\ c \alpha d\delta & -c \alpha t d\delta & 0 \end{bmatrix} \quad \text{----- (5)}$$

したがって静定基本系に水圧または温度荷重が作用する場合のクラウンのたとえば左接線方向の変位は、

$$\begin{aligned} \Delta\delta_{z,3}^{\odot} &= - \int_0^{\delta_A} \frac{M_L y}{E_c I} d\delta + \int_0^{\delta_A} \frac{H_L \cos\phi}{E_c A} d\delta - \int_0^{\delta_A} \kappa \frac{V_L \sin\phi}{G_c A} d\delta \\ &\quad - M_{LA} (\alpha y_A + \alpha_2 \sin\phi_A) + H_{LA} \beta \cos\phi_A - V_{LA} (\alpha_2 y_A + \delta \sin\phi_A) = - \Delta\delta_{z,3}^{\odot} \quad \text{----- (6)} \end{aligned}$$

$$\Delta\delta_{z,3}^{\oplus} = \int_0^{\delta_A} y c \alpha d\delta - \int_0^{\delta_A} \cos\phi c \alpha t d\delta = - \Delta\delta_{z,3}^{\oplus} \quad \text{----- (7)}$$

したがって静定基本系に水圧および温度荷重と、各不静定力が作用した場合のクラウンにおける正の断面力方向の変位を、左側および右側に対しておのおの $\Delta\theta^{\odot}, \Delta\delta^{\odot}, \Delta\gamma^{\odot}, \Delta\theta^{\oplus}, \Delta\delta^{\oplus}, \Delta\gamma^{\oplus}$ とすれば

$$\begin{bmatrix} L\Delta\theta^{(0)} \\ L\Delta\delta^{(0)} \\ L\Delta r^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L\delta_{11}^{(0)} & L\delta_{12}^{(0)} & L\delta_{13}^{(0)} \\ * & L\delta_{22}^{(0)} & L\delta_{23}^{(0)} \\ * & * & L\delta_{33}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ H_0 \\ V_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_0\delta_1^{(0)} \\ L_0\delta_2^{(0)} \\ L_0\delta_3^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_t\delta_1^{(0)} \\ L_t\delta_2^{(0)} \\ L_t\delta_3^{(0)} \end{bmatrix} \quad \text{----- (8)}$$

$$\begin{bmatrix} R\Delta\theta^{(0)} \\ R\Delta\delta^{(0)} \\ R\Delta r^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\delta_{11}^{(0)} & R\delta_{12}^{(0)} & R\delta_{13}^{(0)} \\ * & R\delta_{22}^{(0)} & R\delta_{23}^{(0)} \\ * & * & R\delta_{33}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ H_0 \\ V_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_0\delta_1^{(0)} \\ R_0\delta_2^{(0)} \\ R_0\delta_3^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_t\delta_1^{(0)} \\ R_t\delta_2^{(0)} \\ R_t\delta_3^{(0)} \end{bmatrix} \quad \text{----- (9)}$$

アーチの連続条件式

$$\begin{bmatrix} L\Delta\theta^{(0)} \\ L\Delta\delta^{(0)} \\ L\Delta r^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R\Delta\theta^{(0)} \\ R\Delta\delta^{(0)} \\ R\Delta r^{(0)} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{----- (10)}$$

に (8), (9) 式を代入することによって次式に示されるアーチの弾性方程式を誘導することが出来る。
すなわち

$$\begin{bmatrix} (L\delta_{11}^{(0)} + R\delta_{11}^{(0)}) & (L\delta_{12}^{(0)} + R\delta_{12}^{(0)}) & (L\delta_{13}^{(0)} - R\delta_{13}^{(0)}) \\ * & (L\delta_{22}^{(0)} + R\delta_{22}^{(0)}) & (L\delta_{23}^{(0)} - R\delta_{23}^{(0)}) \\ * & * & (L\delta_{33}^{(0)} + R\delta_{33}^{(0)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ H_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_0\delta_1^{(0)} + R_0\delta_1^{(0)}) \\ (L_0\delta_2^{(0)} + R_0\delta_2^{(0)}) \\ (L_0\delta_3^{(0)} - R_0\delta_3^{(0)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (L_t\delta_1^{(0)} + R_t\delta_1^{(0)}) \\ (L_t\delta_2^{(0)} + R_t\delta_2^{(0)}) \\ (L_t\delta_3^{(0)} - R_t\delta_3^{(0)}) \end{bmatrix} \quad \text{----- (11)}$$

(11) 式は Bureau of Reclamation が微小部分の変形のアーチクラウンの変位に及ぼす影響を積分することによって誘導した弾性方程式とまったく一致する。かくして左辺の flexibility マトリクスの各要素すなわちアーチ常数の意義と、それが対称マトリクスとなることは、弾性固定アーチにおけるマックスウェルの定理を意味することが明らかにされた。

3. 応力の挙動特性

等厚、対称円弧アーチに水圧および堤体平均温度、温度勾配の荷重が各個に作用する場合のクラウンおよびアバットメントの内、外弧面における応力の無次元量（応力係数）は $\frac{T}{E_r}$, ϕ_A , $\frac{E_r}{E_c}$ の関数として、たとえばクラウンに対して図-2, 図-3, 図-4のように表わすことが出来る。アバットメントにおける応力も同様に図示される。これより $\frac{E_r}{E_c}$ が 1 より 10 まで、 ϕ_A が 45° より 60° まで $\frac{T}{E_r}$ が 0.05 より 1.0 までの範囲において次の事が考察される。

(1) クラウンおよびアバットメントにおける水圧荷重による圧縮応力および堤体平均温度上昇による応力の絶対値は、中心角が大きくなるにしたがって、薄肉ではより小さく厚肉ではより大きくなる、温度勾配による応力は中心角の影響もとくに薄肉アーチの場合顕著に受けない。

図-4および図-6は年間の堤体平均温度変化量および温度勾配変化量が堤厚に逆比例する関係を考慮した応力係数を示すものであり、これより

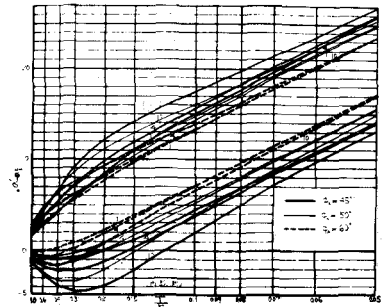


図-2 水圧荷重に対するクラウンの応力係数

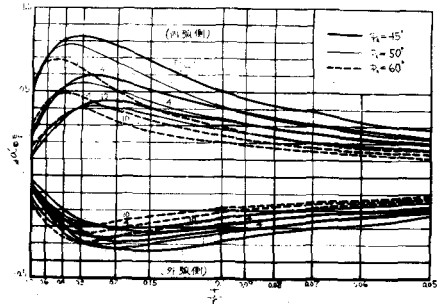


図-3 堤体平均温度上昇に対するクラウンの応力係数

(2) クラウンおよびアバットメントにおける水圧荷重による圧縮応力、および堤厚と堤体平均温度および温度勾配変化量との関係を考慮した温度荷重による応力の絶対値は、一般的に堤厚を薄くするほど大きくなると言える。

(3) 堤体平均温度上昇によるアーチ応力の絶対値は、堤厚と堤体平均温度変化量との関係を考慮する場合に、 $\frac{T}{r}$ を一定として半径 r を大きくするほど小さくなる。

水圧荷重が単独に作用する場合にも引張応力が作用しない条件および堤厚と温度との関係より、温度荷重による引張応力を除去するに必要な限界水圧荷重を求め、たとえばクラウンの外側側に対して図-7のようにこれを図示した。図-7の各曲線の上方領域が引張応力の発生領域となる。ダム上流面が水面上に露出する部分の温度勾配が零の場合も検討したが、水圧荷重、堤体平均温度上昇、温度勾配の3荷重が同時に作用するアーチクラウンの外側面に引張応力はもっとも発生しやすい。したがって

(4) 引張応力の発生を防ぐには ① 堤厚を薄くする。ただし厚肉で基礎アバットメントが軟らかい場合はむしろ厚くする。② 基礎アバットメントを軟らかくする。③ 中心角は薄肉では大きく厚肉では小さくする。④ $\frac{T}{r}$ を一定として半径 r を大きくする。

(5) 水圧荷重が直接作用しないダム上部において温度荷重による引張応力の発生を避けるためには、アーチリングの温度膨脹に対する片持ちり抵抗に期待しなければならぬ。またグラウト完了後は速やかにたん水を開始しなければならぬであろう。コンクリートアーチ橋では限界水圧荷重に相当する自重を作用せしめるよう設計すべきであろう。

最後に本研究を行うにあたり御教示を頂いた熊大福井教授に感謝すると共に、本文は筆者が土木研究所において、石井、中村、飯田部室長の指導の下に行った研究をさうに発表させたものであることを記して謝意を表する。

参考文献

- 1) United States, Bureau of Reclamation: "Treatise on Dams, Chap. 10 Arch Dam"
- 2) 林正夫: "基礎変形がアーチダムの応力に及ぼす影響"について - 堤体応力を中心とした一考察 - 土木学会論文集 第69号 別冊(3-1) 1960年8月、その他

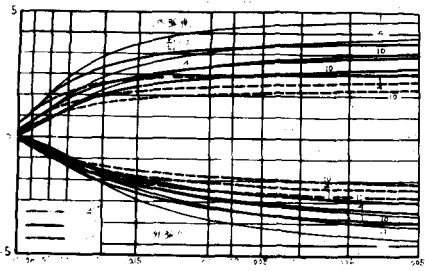


図-4 堤厚と堤体平均温度上昇との関係を考慮した堤体平均温度上昇に対するクラウンの応力係数

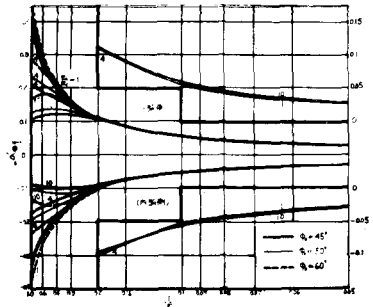


図-5 温度勾配に対するクラウンの応力係数

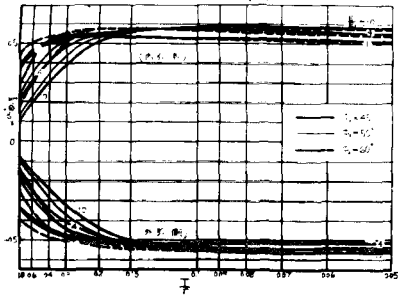


図-6 堤厚と温度勾配と関係を考慮した温度勾配に対するクラウンの応力係数

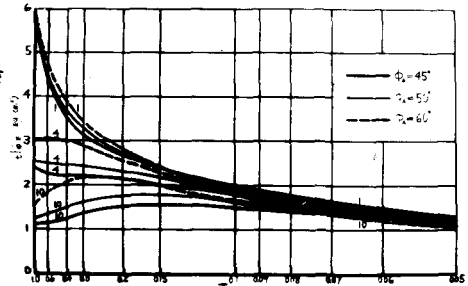


図-7 温度荷重を受けるアーチのクラウンの外側面において引張応力を生じない限界水圧荷重を示す曲線