

II-6 軸力と曲げの組合せ応力に対する補足エネルギー

九州大学 教授 山崎徳也

同 大学院 太田俊昭

同 学 生 〇北島崇雄

序言 軸力と曲げの組合せ応力を受けた矩形等断面ばりの弾塑性挙動を把握するため、本論文では、前に著者らが考察した曲げに対する補足エネルギー法⁽¹⁾と同一手法によってかかる組合せ応力に対する補足エネルギーの実用式を誘導し、之に基くエネルギー法の確立を回ったもので、従来の微分方程式による解法と比較すれば、計算手法上の簡易性と理論面の多様性において勝っており、しかも充分の精度をうるなど、極めて有効な実用解法である。

§1 曲げと軸力の関係式

[1] 弾性領域

図-1(a)に示す矩形等断面ばりが、一定の軸力 N 、および漸増曲げモーメント M を受けたとき、弾性領域に

おける断面の応力分布は図-1(b)のごとくなり、断面積を A 、曲げ剛性を EI 、中立軸の歪みを ε 、曲率を ϕ とすれば、 N および M は周知のごとく次式で与えられる。

$$N = \int \sigma dA = E\varepsilon A, \quad M = \int -\sigma x dA = E\phi I \quad (1)$$

[2] 第1弾塑性領域

図-1(c)のごとく、引張側応力の一部が降伏したときの断面に働くモーメント M_I は、

$$M_I = \int_{-t}^k -\sigma_x x dx - \int_k^h \sigma_y x dx \quad (2)$$

また軸力 N は、応力の釣合式より、

$$N = \int_{-t}^k \sigma_x dx + \int_k^h \sigma_y dx \quad (3)$$

式(3)を無次元化するため、 $N_y = \sigma_y (2h \times 1)$ で両辺を割れば次式がえられる。

$$n = \frac{N}{N_y} = 1 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{t}{h}\right)^2 \varphi \quad (4)$$

N_y : 軸力が単独に働くときの降伏荷重

ただし、 $\varphi = \frac{\phi}{\phi_y}$ 、ここに、 ϕ_y : 曲げのみが働くときの降伏時の曲率

次に、 $\varphi = \frac{h}{t+h}$ なる関係を考慮したうえで、式(4)を式(2)に代入すれば、結局第1弾塑性領域における曲げモーメント M_I として次式をうる。

$$M_I = (1-n) \left(3 - 2\sqrt{\frac{1-n}{\varphi}}\right) M_y \quad (5)$$

上式において $t=h$ 、したがって $\varphi = 1-n$ とおけば、弾性限界時の第1降伏モーメント M_{y1} を次のごとくうる。

$$M_{y1} = (1-n) M_y \quad (6)$$

ただし、 $M_y = \frac{2}{3} \sigma_y (h^2 \times 1)$ で曲げのみによる降伏モーメントを表わす。

さらに、 $t+h = h-t$ 、したがって $\varphi = \frac{1}{1-n}$ とおけば、第1弾塑性領域と第2弾塑性領域の境界におけるモーメントいわゆる第2降伏モーメント M_{y2} をえ、次のごとくなる。

$$M_{y2} = (1+n-2n^2) M_y \quad (7)$$

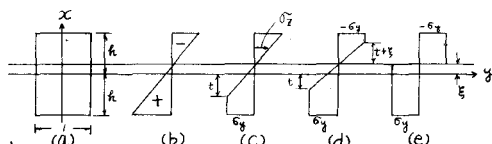


図-1

[3] 第2弾塑性領域

図-1(d)のごとく圧縮側の応力が降伏すれば、断面に働くモーメント M_{II} は

$$M_{II} = \int_{t+2\xi}^h \sigma_y x dx + \int_{-c}^{t+2\xi} -\sigma_x x dx + \int_{-h}^{-c} -\sigma_y x dx \quad (8)$$

$$\text{また軸力 } N \text{ は, } N = \int_{t+2\xi}^h \sigma_y dx + \int_{-c}^{t+2\xi} \sigma_x dx + \int_{-h}^{-c} \sigma_y dx \quad (9)$$

[2]と同様にして、 M_{II} を n と φ であらわせば、結局下記の式でもとめられる。

$$M_{II} = \left\{ \frac{3}{2}(1-n^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi}\right)^2 \right\} M_y \quad (10)$$

さらに、上式において、 $\varphi \rightarrow \infty$ とすれば、全断面の応力が降伏に達したときの完全塑性モーメント M_{PN} が次のごとくえられる。

$$M_{PN} = \frac{3}{2}(1-n^2) M_y \quad (11)$$

式(11),(5),(10)を用いて M と φ との関係を n をパラメーターとして図示すれば、図-2のごとくなり、すなわち軸力 N がまずについて M/M_y が著るしく減少することが認められる。

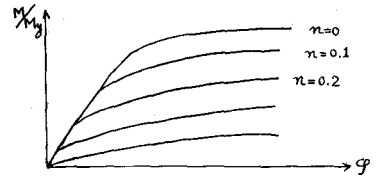


図-2

§2 補足歪エネルギー

一般に曲げと軸力を考慮した棒の単位長さ当りに貯えられる補足歪エネルギーは、次式で定義される。

$$\frac{dU}{dS} = \int_A \int_0 \epsilon d\sigma dA = \int_M \phi dM + \frac{N^2}{2EA} \quad (12)$$

上式において、曲げ補足歪エネルギーを表わす第1項を考察すれば、明らかに図-3の M - φ diagram において斜線

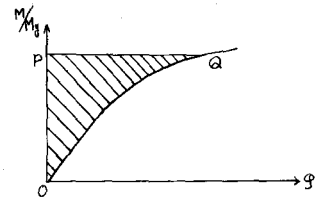


図-3

の面積 OPQ に相当する。しかるに、 M - φ 曲線は式(5)および(10)の複雑な函数で与えられるゆえ、面積 OPQ は M の無理函数で表わされることとなりその後の算定が極めて煩雑となる。この難点を排除するため M - φ 曲線を図-4で示される2本の近似直線 (M - φ 第2近似直線) と置換すれば、面積 OPQ は、 $M_{y2} \leq M \leq M_{y2}$ の範囲では、

$$\text{面積 } OPQ = \int \phi dM = \frac{M^2}{2EI} + K_1 \frac{(M - M_{y2})^2}{2EI}$$

$$\text{ただし, } K_1 = K'_1 - 1$$

$M_{y2} \leq M \leq M_{PN}$ の範囲では、

$$\text{面積 } OP'Q' = \int \phi dM = \frac{M^2}{2EI} + K_1 \frac{(M - M_{y2})^2}{2EI} + K_2 \frac{(M - M_{y2})^2}{2EI}$$

$$\text{ただし, } K_2 = K'_2 - K'_1$$

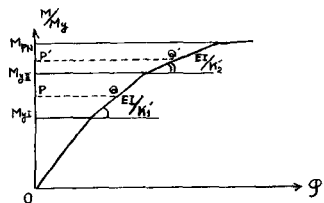


図-4

ここに、これらの近似直線の勾配を規制する K'_1 、 K'_2 の決定には、前に著者らが曲げに対する補足エネルギー⁽¹⁾の実用式を求める際に用いた“エネルギー等置法”によればよく、結果のみ示せば、それそれ次のごとくなる。

$$K'_1 = 1/(1-n), \quad K'_2 = 4(1+n^2)/(1-n)^3$$

又、これを図-5のごとく1本の直線(M-φオ1 近似直線)で置換した場合は、

$$\text{面積 } OPQ = \int \phi dM = \frac{M^2}{2EI} + K_0 \frac{(M - M_{ys})^2}{2EI}$$

$$\text{ただし, } K_0 = K'_0 - 1$$

$$K_0 = \frac{4(3\pi^2 + 2\pi + 1)}{(1 - \pi)(1 + 3\pi)^2}$$

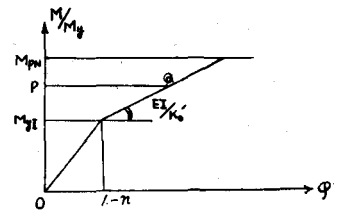


図-5

以上から軸力と曲げの組合せ能力に対するはり全体に貯えられる補足歪エネルギーは、弾性領域をも考慮すれば、M-φオ2 近似直線に対しては、

$$U = \int_{E+P_1+P_2} \frac{M^2}{2EI} dS + K_1 \int_{P_1+P_2} \frac{(M - M_{ys})^2}{2EI} dS + K_2 \int_{P_2} \frac{(M - M_{ys})^2}{2EI} dS + \int_{E+P_1+P_2} \frac{N^2}{2EA} dS \quad (13)$$

M-φオ1 近似直線に対しては、

$$U = \int_{E+P_1+P_2} \frac{M^2}{2EI} dS + K_0 \int_{P_1+P_2} \frac{(M - M_{ys})^2}{2EI} dS + \int_{E+P_1+P_2} \frac{N^2}{2EA} dS \quad (14)$$

ただし、E：弾性領域、P₁：オ1 弾塑性領域、P₂：オ2 弾塑性領域

ここで、実用に便ならしめるために、K₁、K₂、およびK₀の値をそれぞれπをパラメーターとして数表化し、その一部を表-1に示した。

§3 解法および誤差の検討

以上の諸式を用いて、一定の軸圧縮力Nと部材の中央に漸増集中荷重Pを受ける矩形等断面単純支持はりの中央点のたわみδをPが零から最終崩壊荷重P_uに達するまでの値に対して算定すれば、次のごとくである。(図-6参照)

すなわち、M-φオ2 近似直線による補足エネルギーは、部材ABに対して、

$$U = \int_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{M^2}{EI} dx + K_1 \int_{a_1}^{\frac{\delta}{2}} \frac{(M - M_{ys})^2}{EI} dx + K_2 \int_{a_2}^{\frac{\delta}{2}} \frac{(M - M_{ys})^2}{EI} dx + \int_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{N^2}{EA} dx \quad (15)$$

$$\text{ただし, } M = \frac{P}{2}x, a_1 = \frac{2M_{ys}}{P}, a_2 = \frac{2M_{yp}}{P}$$

変分原理により中央点のたわみδは、

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\partial U}{\partial P} \\ &= \int_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{2M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx + K_1 \int_{a_1}^{\frac{\delta}{2}} \frac{2(M - M_{ys})}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx \\ &\quad + K_2 \int_{a_2}^{\frac{\delta}{2}} \frac{2(M - M_{yp})}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx \end{aligned}$$

π	K ₁	K ₂	K ₀
0	1.00	4.00	4.00
0.1	1.11	5.54	3.23
0.2	1.25	8.12	2.96
0.3	1.42	12.71	2.96
0.4	1.66	21.48	3.14
0.5	2.00	40.00	3.52
0.6	2.50	85.00	4.18
0.7	3.33	220.7	5.36
0.8	5.00	820.0	7.82
0.9	10.00	7240.0	15.28

表-1

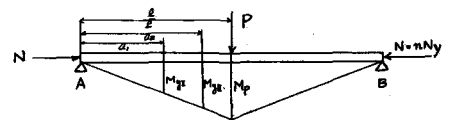
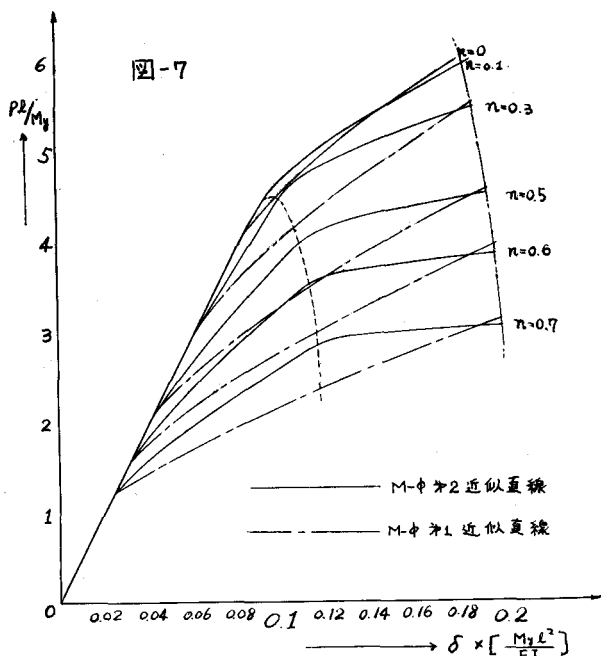


図-6

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{Px}{2} \cdot \frac{x}{2} dx + \frac{2K_1}{EI} \int_{a_1}^{\frac{\delta}{2}} \left(\frac{Px}{2} - M_{y1} \right) \frac{x}{2} dx + \frac{2K_2}{EI} \int_{a_2}^{\frac{\delta}{2}} \left(\frac{Px}{2} - M_{y2} \right) \frac{x}{2} dx \\
 &= \frac{P\delta^3}{48EI} (1 + K_1 + K_2) - \frac{\delta^2}{8EI} (K_1 M_{y1} + K_2 M_{y2}) + \frac{2(K_1 M_{y1}^2 + K_2 M_{y2}^2)}{3P^2 EI} \quad (16)
 \end{aligned}$$

上式より、 δ と P の関係を n をパラメーターとして図示すれば、図-7 のごとくなる。この結果は、 M - ϕ 曲線を忠実に積分して求めた補足歪エネルギーに基づく厳密解とほとんど一致するもので、例えば $n=0.5$ で中央点のモーメントが M_{y2} になったときのたわみは、式(16)において $P = P_y$ ($P_y = \frac{4M_{y2}}{\delta}$) とおけば、 $0.1016 \times \frac{M_{y2} \delta^2}{EI}$ となり、これは厳密解によって求めた値 $0.1026 \times \frac{M_{y2} \delta^2}{EI}$ に比べてその誤差は、わずかに 0.8% であり、さらに同点のモーメントが M_{pn} に達したときのたわみは、式(16)において $P = \frac{9}{8} P_y$ とおけば、 $0.1926 \times \frac{M_{y2} \delta^2}{EI}$ となり、同じく厳密解によって求めた値 $0.1942 \times \frac{M_{y2} \delta^2}{EI}$ に比べて、誤差はたかだか 1.0% にすぎず本法の近似性がきわめてすぐれていることが立証



される。なお M - ϕ 第2 近似直線の代りに M - ϕ 第1 近似直線を用いれば、式(15)、(16)の右辺の第3項が消失し計算はさらに簡単になるが、弾性限界時の荷重 P_y と完全塑性時の荷重 P_u との中間の P に対してはかなりの誤差が生じる。例えば $n=0.5$ で中央点のモーメントが M_{y2} および M_{pn} に達したときのたわみは、式(16)において $K_1 = K_0$ 、 $K_2 = 0$ とおけば $0.1374 \times \frac{M_{y2} \delta^2}{EI}$ 、 $0.1829 \times \frac{M_{y2} \delta^2}{EI}$ をえ、したがって誤差はそれぞれ 33.9% 、 5.8% となる。以上から軸力を考慮した矩形断面に対する曲げ補足エネルギーの実用式には、 M - ϕ 第2 近似直線にもとずく式(13)を用いなければならないことがわかる。

結語 本研究の結果軸力と曲げを受ける矩形等断面のはり構造物に対する補足エネルギー法が弾塑性分野においても実用可能となり、実際に連続はりやラーメンに適用するにはあらかじめの連モーメントの定理やたわみ角公式を誘導しておけば、弾性的場合と同様にそれぞれの分野において本法の価値を充分発揮しうることが立証された。

参考文献

- (1) 山崎 太田：塑性解析に拡張したエネルギー法 オ19回土木学会学術講演会講演概要要略 39年5月
- (2) K. Kloppel: Über die Begrenzung der Traglast eines statisch unbestimmten biegesteifen Stabwerkes aus Bau-stahl durch das Instabilwerden des Gleichgewichtes, DER STAHLBAU, BERLIN, Februar 1961