

II - 5 任意垂直荷重を受ける梁支承上の無梁板の解法

九州大学 教授 山崎徳也
助手 〇澤本 武

1. 緒言 柱と板が直結する無梁板構造物の解法に関する理論研究は、これまで、
Marcus⁽¹⁾, *Nadai*⁽²⁾, *Lewy*⁽³⁾, *Greiner*⁽⁴⁾, 宮崎⁽⁵⁾, 竟天⁽⁶⁾等多くの入々により行なわれてきた。しかし、
 これらの研究は、無梁板が構造的に対称かつ無限に広がること、載荷が等分布荷重ない
 は対称荷重等の特殊な状態に限定されること、解法が複雑であること等の多くの難点を
 もつ。特に任意垂直荷重を受け、柱配列ならびに柱間隔が全く任意かつ板かりすべし方向
 において有限であるとき無梁板の解法を提示した論文は未だ見当らない。

本論文は柱配列ならびに柱間隔が任意かつ板間距が単純支持された無梁板に任意垂直
 荷重が働く場合の厳密な理論解析法の第一報として、梁支承上の無梁板の解法を提示する。

2. 解法 一般に無梁板は柱と板とが直結する中、板から柱に垂直反力およびそれ
 ぞれの方向の水平反力、反力モーメント、捩りモーメントが伝えられる。この中、板面に
 対して垂直荷重が働く場合の板の垂直面内曲げを論ずる場合には、捩りモーメントおよび
 水平反力はなく、また *Nadai*, *Lewy* の研究をはじめのこれまでの多くの研究で仮定されてきた
 ごとく、柱を梁支承とみなせば反力モーメントもなく、結局垂直反力のみが板から柱に伝
 えられるとき等方性等断面無梁板の解法を論ずることとする。

(1) 板の弾性曲面 等方性等断面平面板の弾性曲面を w 、これに働く任意垂直荷重の荷重
 強度を $g(x, y)$ とすれば、平面板の基礎微分方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{g(x, y)}{D} \quad (1)$$

ただし、 D : 板剛度 ($ED^3/12(1-\nu^2)$), E : 板の弾性係数,

δ : 板の厚さ, ν : 板のポアソン比,

図-1 に示すスパン a 、 b の四辺単純支持矩形板に於いて、
 AB 辺に沿って x 軸、 AD 辺に沿って y 軸、断面に直交して w

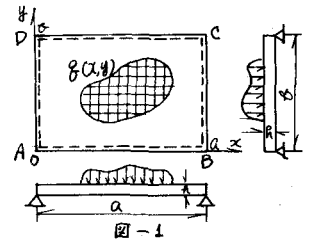


図-1

軸をとり直交座標を導入すれば、その境界条件は次の通りであ
 る。

$$x=0, a \text{ で } w=0, M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$y=0, b \text{ で } w=0, M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

式(2)を満足する w の式として、二重正弦フーリエ級数式を仮定できることは我々のよく
 知るところである。すなわち、

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad \text{ただし } G_{mn} = \text{任意常数} \quad (3)$$

よって、本論文で取り扱う無梁板は図-2 に示すごとく四辺単純支持であるから、載荷の
 重同様、各中間支梁における垂直反力をすべて荷重とみなせば、四辺単純支持矩形板とし
 て取扱える。いま、無梁板を支える各中間支梁をそれぞれ 11, 12, ..., 15, 21, 22, ...,
 25, ..., 41, 42, ..., 45 とし、板面に垂直な任意荷重 $q(x, y)$ が作用したとき、各
 中間支梁に生ずる支梁反力をそれぞれ $V_{11}, V_{12}, \dots, V_{15}, V_{21}, V_{22}, \dots, V_{25}, \dots, V_{41}, \dots, V_{45}$
 , $V_{42}, \dots, V_{45}$ とする。凡そ支梁反力の符号は上向きを正とする。かかるとき、任意荷重 $q(x, y)$

および各支点反力を二重正弦フーリエ級数展開すれば次のごとくえられる。

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4)$$

$$V_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{11} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad V_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{12} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$V_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{21} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad V_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{22} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$V_5 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{31} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad V_6 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{32} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$V_7 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{41} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad V_8 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{42} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$V_9 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{51} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad V_{10} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{52} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$V_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{61} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad V_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{62} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$V_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{71} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad V_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{72} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$V_{15} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{81} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad V_{16} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{82} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

$$V_{17} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{91} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad V_{18} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{92} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

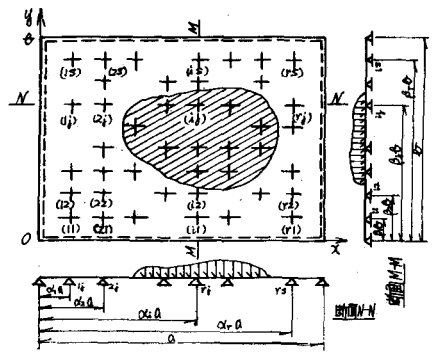


図 - 2

こゝに

$$F_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy \, dx \quad (6)$$

$$F_{mn}^{11} = \frac{4}{ab} V_1 \sin m\pi\alpha_1 \sin n\pi\beta_1, \quad F_{mn}^{12} = \frac{4}{ab} V_2 \sin m\pi\alpha_1 \sin n\pi\beta_2,$$

$$F_{mn}^{21} = \frac{4}{ab} V_3 \sin m\pi\alpha_2 \sin n\pi\beta_1, \quad F_{mn}^{22} = \frac{4}{ab} V_4 \sin m\pi\alpha_2 \sin n\pi\beta_2,$$

$$F_{mn}^{31} = \frac{4}{ab} V_5 \sin m\pi\alpha_3 \sin n\pi\beta_1, \quad F_{mn}^{32} = \frac{4}{ab} V_6 \sin m\pi\alpha_3 \sin n\pi\beta_2,$$

$$F_{mn}^{41} = \frac{4}{ab} V_7 \sin m\pi\alpha_4 \sin n\pi\beta_1, \quad F_{mn}^{42} = \frac{4}{ab} V_8 \sin m\pi\alpha_4 \sin n\pi\beta_2,$$

$$F_{mn}^{51} = \frac{4}{ab} V_9 \sin m\pi\alpha_5 \sin n\pi\beta_1, \quad F_{mn}^{52} = \frac{4}{ab} V_{10} \sin m\pi\alpha_5 \sin n\pi\beta_2,$$

$$F_{mn}^{61} = \frac{4}{ab} V_{11} \sin m\pi\alpha_6 \sin n\pi\beta_1, \quad F_{mn}^{62} = \frac{4}{ab} V_{12} \sin m\pi\alpha_6 \sin n\pi\beta_2,$$

$$F_{mn}^{71} = \frac{4}{ab} V_{13} \sin m\pi\alpha_7 \sin n\pi\beta_1, \quad F_{mn}^{72} = \frac{4}{ab} V_{14} \sin m\pi\alpha_7 \sin n\pi\beta_2,$$

$$F_{mn}^{81} = \frac{4}{ab} V_{15} \sin m\pi\alpha_8 \sin n\pi\beta_1, \quad F_{mn}^{82} = \frac{4}{ab} V_{16} \sin m\pi\alpha_8 \sin n\pi\beta_2,$$

$$F_{mn}^{91} = \frac{4}{ab} V_{17} \sin m\pi\alpha_9 \sin n\pi\beta_1, \quad F_{mn}^{92} = \frac{4}{ab} V_{18} \sin m\pi\alpha_9 \sin n\pi\beta_2,$$

無梁板に働く任意垂直荷重 $p(x, y)$ の他に各中間支点における反力 $V_1, V_2, \dots, V_6, V_7, V_8, \dots, V_{10}, V_{11}, V_{12}, \dots, V_{14}, V_{15}, \dots, V_{18}$ をも荷重とみなし、式 (1) の右辺に式 (4), (5) を代入し、かつ式 (3) を用いれば、任意常数 G_{mn} が次のごとくえられる。

$$G_{mn} = \frac{T_{mn}}{D \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)} \quad (8)$$

$$T_{mn} = F_{mn} - \frac{4}{ab} (V_1 \sin m\pi\alpha_1 \sin n\pi\beta_1 + V_2 \sin m\pi\alpha_1 \sin n\pi\beta_2 + \dots + V_6 \sin m\pi\alpha_3 \sin n\pi\beta_2 + V_7 \sin m\pi\alpha_4 \sin n\pi\beta_1 + V_8 \sin m\pi\alpha_4 \sin n\pi\beta_2 + \dots + V_{10} \sin m\pi\alpha_5 \sin n\pi\beta_2 + V_{11} \sin m\pi\alpha_6 \sin n\pi\beta_1 + V_{12} \sin m\pi\alpha_6 \sin n\pi\beta_2 + \dots + V_{14} \sin m\pi\alpha_8 \sin n\pi\beta_2 + V_{15} \sin m\pi\alpha_9 \sin n\pi\beta_1 + V_{16} \sin m\pi\alpha_9 \sin n\pi\beta_2 + \dots + V_{18} \sin m\pi\alpha_9 \sin n\pi\beta_2) \quad (9)$$

式 (8) を式 (3) に代入すれば、図 - 2 に示す無梁板に関する弾性曲面 w が求まり、次式とれる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{mn}}{D \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (10)$$

(2) 無梁板解折のための基本連立方程式

平面板の全歪エネ U は一般に次式で与えられる。

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b [(\nabla w)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}] \, dx \, dy \quad (11)$$

式 (11) の [] 内第 2 項以内の積分は、Gauss の定理により、板周辺に沿って曲線積分に直すとができ、本題の無梁板におけるごとく周辺に力がかかっている場合には、この曲線積分

は 0 と 1 のみから、結局板の歪エネルギー U は式 (11) よりさらに簡単な式で表わされる。

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b (\nabla^2 w)^2 dx dy \quad \text{----- (12)}$$

式 (12) に式 (10) を代入し、無梁板全体の歪エネルギーを求めれば結局次のごとくえられる。

$$U = \frac{a^2 b^2}{8 D \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{mn}^2}{\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2} \quad \text{----- (13)}$$

式 (13) に Castigliano の定理を適用すれば、図-2 に示す無梁板に関する各中間支束 11, 12, ..., 15, 21, 22, ..., 25, ..., 1j, ..., 1r, 1r, 2r, ..., 1s, ..., 1j, ..., 1r, 1r, 2r, ..., 1s, ... におけるそれぞれの垂直変位 $d_{11}, d_{12}, \dots, d_{15}, d_{21}, d_{22}, \dots, d_{25}, \dots, d_{1j}, \dots, d_{1r}, d_{1r}, d_{2r}, \dots, d_{1s}$ と支束反力 $V_{11}, V_{12}, \dots, V_{15}, V_{21}, V_{22}, \dots, V_{25}, \dots, V_{1j}, \dots, V_{1r}, V_{1r}, V_{2r}, \dots, V_{1s}$ との - 連立関係式が求まる。すなわち

$$\frac{\partial U}{\partial V_{ij}} = d_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s) \quad \text{----- (14)}$$

より、結局次の連立方程式をうる。

$$\begin{aligned} V_{11} D_{11}^{ij} + V_{12} D_{12}^{ij} + \dots + V_{15} D_{15}^{ij} + V_{21} D_{21}^{ij} + V_{22} D_{22}^{ij} + \dots + V_{25} D_{25}^{ij} + \dots + V_{1j} D_{1j}^{ij} + \dots + V_{1r} D_{1r}^{ij} \\ + V_{2r} D_{2r}^{ij} + \dots + V_{1s} D_{1s}^{ij} = \frac{a^2 b^2}{4} D_{ij}^{ij} + \frac{a^2 b^2}{4} \pi^4 D \cdot d_{ij} \end{aligned} \quad \text{----- (15)}$$

($i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s$ であり、式 (15) は中間支束の数と同数の連立方程式になる。)

よって

$$\begin{aligned} D_{11}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \\ D_{12}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{15}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \\ D_{21}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \\ D_{22}^{ij} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \end{aligned}$$

$$D_{25}^{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j$$

$$D_{1j}^{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin^2 m\pi\alpha_i \cdot \sin^2 n\pi\beta_j$$

$$D_{1r}^{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_r \cdot \sin n\pi\beta_j \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j$$

$$D_{2r}^{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_r \cdot \sin n\pi\beta_j \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j$$

$$D_{2s}^{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_r \cdot \sin n\pi\beta_s \cdot \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin n\pi\beta_j$$

$$D_{ij}^{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{mn}}{K_{mn}} \sin m\pi\alpha_i \cdot \sin m\pi\beta_j$$

$$i = 1 \quad K_{mn} = \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2$$

$V_{11}, V_{12}, \dots, V_{15}, V_{21}, V_{22}, \dots, V_{25}, \dots, V_{1j}, \dots, V_{1r}, V_{2r}, \dots, V_{1s}, d_{11}, d_{12}, \dots, d_{15}, d_{21}, d_{22}, \dots, d_{25}, \dots, d_{1j}, \dots, d_{1r}, d_{2r}, \dots, d_{1s}$ の未知数において、各中間支束の反力 V または垂直変位 d のいずれか一方が他の条件から判明すれば、未知数は半減し、したがって式 (15) の方程式の数と未知数が一致し、これらの諸式を連立に解くことにより、図-2 の無梁板の解がえられることになる。

(3) 計算例

図-3に示すごとく、板周囲が単純支持されかつ中間支梁11, 12, 21, 22で支持された無梁板に、等分布荷重を滿載する場合の数値計算例を示せば次の通りである。

すなわち、図-3において、各中間支梁の支梁次下が起るたわみものとすれば $d_{11} = d_{12} = d_{21} = d_{22} = 0$ であるから、式(15)は次の内容となる。

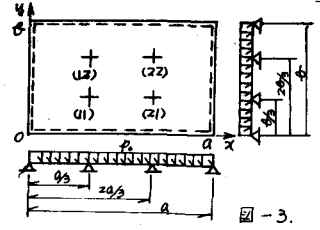


図-3.

$$\left. \begin{aligned} V_{11} \cdot D_{11}'' + V_{12} \cdot D_{12}'' + V_{21} \cdot D_{21}'' + V_{22} \cdot D_{22}'' &= \frac{q^2}{2} D'' \\ V_{11} \cdot D_{11}'' + V_{12} \cdot D_{12}'' + V_{21} \cdot D_{21}'' + V_{22} \cdot D_{22}'' &= \frac{q^2}{2} D'' \\ V_{11} \cdot D_{11}'' + V_{12} \cdot D_{12}'' + V_{21} \cdot D_{21}'' + V_{22} \cdot D_{22}'' &= \frac{q^2}{2} D'' \\ V_{11} \cdot D_{11}'' + V_{12} \cdot D_{12}'' + V_{21} \cdot D_{21}'' + V_{22} \cdot D_{22}'' &= \frac{q^2}{2} D'' \end{aligned} \right\} \text{----- (17)}$$

特に、図-3の a の比 $\frac{a}{b} = 0.5$ の場合について、式(17)の係数および荷重係数を計算すれば次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} D_{11}'' = D_{12}'' = D_{21}'' = D_{22}'' &= 0.3951 \times 10^{-1} a^4, & D_{11}'' = D_{12}'' = D_{21}'' = D_{22}'' &= 0.2900 \times 10^{-1} a^4 \\ D_{11}'' = D_{12}'' = D_{21}'' = D_{22}'' &= 0.1340 \times 10^{-1} a^4, & D_{11}'' = D_{12}'' = D_{21}'' = D_{22}'' &= 0.1268 \times 10^{-1} a^4 \\ D'' = D'' = D'' = D'' &= 0.4839 \times 10^{-1} a^4, \end{aligned} \right\} \text{----- (18)}$$

式(18)の諸数値を用いて、式(17)を連立に解き各中間支梁反力を求めれば次の結果となる
 $V_{11} = V_{12} = V_{21} = V_{22} = 0.0639 qa^2$ ----- (19)

式(19)を式(10)に代入すれば、図-3に示す無梁板の弾性曲面 w がえられ、またこの w を用いて無梁板上の任意点におけるそれぞれの方向の曲げモーメント M_x, M_y , せん断力 Q_x, Q_y , 捩りモーメント M_{xy} および板周囲に於ける支持反力を算出することができる。

3. 結語

二重正弦フーリエ級数を用いて無梁板を解く本法は、次の諸点をその特色として挙げる事ができる。

- (1) 本法にしたがえば、無梁板を解くことは式(15)の多元一次連立方程式を解くだけの簡単な内容となり、かつ連立方程式の未知数として各中間支梁の予静定反力を直接扱う必要なく、その計算は単純なリヤウーメンの骨組構造物を解くのと何差支らない労力とする。
- (2) 本法では特に注意とする無梁板上の点のたわみ量を他の予静定力と同時に簡単な計算で求めることができる点極めて便利である。

以上のごとく、本法は既往の方法に較べて非常に秀れた方法であり、そのうえ式(15)の係数ならびに荷重係数に關してあらかじめの計算を、図表化しておけば、実際の現場における無梁板設計に極めて威力を発揮するものと確信する。

文献 (1) Marcus : Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, Berlin 1924, Jul. Springer.

(2) Nadai : Die elastischen Platten, Berlin 1925, Jul. Springer.

(3) Lewy : Plattendicken und andere trügellose Eisenbetonplatten. 2. Aufl. Berlin 1926, Wilhelm Ernst & Sohn.

(4) Karl Grein : Plattendicken Theorie und Berechnung, Berlin 1928, Wilhelm Ernst & Sohn.

(5) 吉田清二 : たとえば建築学会研究報告第7, 14, 18, 24, 29, 31号, 建築学会論文集第57号等。

(6) 荒天義久 : たとえば建築学会研究報告第14, 18, 20号等。