II－4　フーリエ級数による連続ばりおよびラーメンの解法

九州大学　教授　○山崎徳也
九州大学　助手　樗木　武

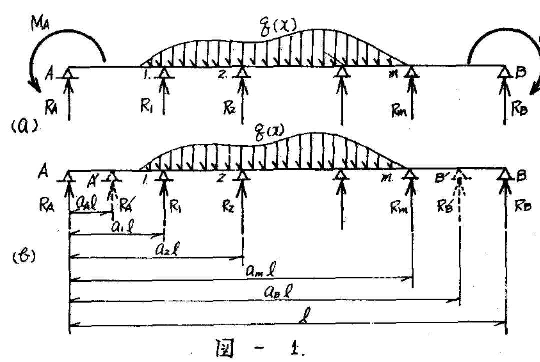
1. 緒言　はりにて構成される骨組構造の解析では一般に代数函数が利用されるが，平面板あるいは曲面板の解析ではフーリエ級数を用いるのが一般的かつ便利である．したがって，はりと板とで構成される構造物の解析において，板をフーリエ級数で解く場合には板とはりの連続条件からはりもフーリエ級数を用いて解く必要がある．

はりの解法にフーリエ級数を用いた例には，弾性ばりに支持された平面板の問題[1,2]における単純支持ばりや，Seng-Lip Lee の論文[3]に示す連続ばり，さらには宮入氏の論文[4]における対称形ラーメンを挙げることができる．本論文は Lee の論文を拡張し，フーリエ級数による連続ばりおよびラーメンの一般的解法を提示したもので，直接的には連続ばりおよびラーメンの解法に，間接的には弾性ばりに支持された平面板の解析に資せんとするものであり，さらに本論文をより一層拡張することにより無梁板解析[5]の手掛りとするものである．

2. 両端に端モーメントが働く場合のフーリエ級数による連続ばりおよびラーメンの解法．

Lee の論文は両端が単純支承で端モーメントがない場合ならびに両端が単純支承で一端に端モーメントが働く場合の連続ばりの解法を提示している．本章はこれを拡張し，両端に端モーメントが働く場合の連続ばりの解法を示し，連続ばりおよびラーメンの解析にフーリエ級数を用いうることを明らかにするとともに，本法より既往のはり理論のたわみ角式を導くことができることを示すものである．

図－1 (a) に示すごとく，連続ばりは一般に中間支点 1，2，……，m と両端支点 A，B で支えられ，垂直任意荷重 $q(x)$ および支点 A，B において端モーメント M_A，M_B が作用するものとする．



図－1.

かかる状態の連続ばりを直接解くことは困難であるから，図－1 (b) に示すごとく，支点 A，B における端モーメント M_A，M_B を仮想支点 A'，B' に働く仮想反力 R_A'，R_B' におきかえる．しかるとき，連続ばりをスパン l なる単純ばりとみなせば，その弾性曲線 $y(x)$ はフーリエ級数を用いて次のごとくあたえられる．（文献(3)参照）

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad \text{ただし } B_n = \text{任意常数} \quad \text{------------} (1)$$

他方，連続ばりに作用する任意垂直荷重 $q(x)$ ならびに仮想支点における反力 R_A'，R_B'，中間支点における反力 R_1，R_2，……，R_m を正弦フーリエ級数展開し，これら全てをスパン l の単純ばりに働く荷重とみなして，式(1)の任意常数 B_n をはりに関する基礎微分方程式 $\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{q(x)}{EI}$ から求めれば次のごとくなる．

$$B_n = \frac{l^4}{EI\pi^4 n^4} \cdot C_n \qquad \text{------------------------------} (2)$$

ただし，$C_n = A_n - A_{1n} - A_{2n} - \cdots\cdots - A_{mn} - A_{Bn}$ であり，A_n，A_{1n}，A_{2n}，……，A_{mn}，A_{An}，A_{Bn} は任意垂直荷重 $q(x)$，中間支点反力 R_1，R_2，……，R_m および仮想支点反力 R_A'，R_B' を正弦フーリエ級数展開した場合の展開係数である．

式(1)，(2)を用いて，図－1（b）に示す連続ばりの歪エネルギー U を求めれば次のごとくえられる．

$$U = \frac{l^5}{4EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{n^4} \qquad \text{------------------------------} (3)$$

ここで，図－1（a）の連続ばりは図－1（b）の連続ばりにおいて $a_A \to 0$，$a_B \to 1$ なる極限状態であるから，この関係を式（3）に代入して，Castigliano の定理を適用すれば，各中間支点 1，2，……，m におけるそれぞれの垂直変位 d_1，d_2，……，d_m ならびに両端のたわみ角 θ_A，θ_B と各中間支点反力 R_1，R_2，……，R_m および端モーメント M_A，M_B との関係式がえられ，結果を示せば次のごとくである．

$$\left.\begin{aligned}
&M_A \cdot \tfrac{\pi}{l} \cdot D_{1A} + R_1 \cdot D_{11} + R_2 \cdot D_{12} + \cdots\cdots + R_m \cdot D_{1m} + M_B \cdot \tfrac{\pi}{l} \cdot D_{1B} = \tfrac{l}{2} D_1 + F \cdot d_1 \\
&M_A \cdot \tfrac{\pi}{l} \cdot D_{2A} + R_1 \cdot D_{21} + R_2 \cdot D_{22} + \cdots\cdots + R_m \cdot D_{2m} + M_B \cdot \tfrac{\pi}{l} \cdot D_{2B} = \tfrac{l}{2} D_2 + F \cdot d_2 \\
&\text{--} \\
&M_A \cdot \tfrac{\pi}{l} \cdot D_{mA} + R_1 \cdot D_{m1} + R_2 \cdot D_{m2} + \cdots\cdots + R_m \cdot D_{mm} + M_B \cdot \tfrac{\pi}{l} \cdot D_{mB} = \tfrac{l}{2} D_m + F \cdot d_m \\
&M_A \cdot \tfrac{\pi}{l} \cdot D_{AA} + R_1 \cdot D_{A1} + R_2 \cdot D_{A2} + \cdots\cdots + R_m \cdot D_{Am} + M_B \cdot \tfrac{\pi}{l} \cdot D_{AB} = \tfrac{l}{2} D_A + F \cdot \tfrac{l}{\pi} \cdot \theta_A \\
&M_A \cdot \tfrac{\pi}{l} \cdot D_{BA} + R_1 \cdot D_{B1} + R_2 \cdot D_{B2} + \cdots\cdots + R_m \cdot D_{Bm} + M_B \cdot \tfrac{\pi}{l} \cdot D_{BB} = \tfrac{l}{2} D_B + F \cdot \tfrac{l}{\pi} \cdot \theta_B
\end{aligned}\right\} \text{------------} (4)$$

ただし　$F = \dfrac{EI\pi^4}{2l^3}$

ここに，D_{1A}，D_{11}，D_{12}，……，D_{1m}，D_{1B}；D_{2A}，D_{21}，D_{22}，……，D_{2m}，D_{2B}；………；D_{mA}，D_{m1}，D_{m2}，……，D_{mm}，D_{mB}；D_{AA}，D_{A1}，D_{A2}，……，D_{Am}，D_{AB}；D_{BA}，D_{B1}，D_{B2}，……，D_{Bm}，D_{BB}；D_1，D_2，……，D_m，D_A，D_B は連続ばりの全長 l，A点から各中間支点にいたる距離 $a_1 l$，$a_2 l$，……，$a_m l$ および任意垂直荷重 $q(x)$ によりえられる係数である．

M_A，M_B，R_1，R_2，……，R_m，θ_A，θ_B，d_1，d_2，……，d_m のうちいずれか（$m+2$）個既知であれば式（4）を連立に解くことができ，図－1（a）の連続ばりの解がえられる．

また，式（4）において特に $R_1 = R_2 = \cdots\cdots = R_m = 0$ とすれば，一径間単純ばりに任意垂直荷重 $q(x)$ と端モーメント M_A，M_B が作用する場合の連立方程式をうるから，これを解いて，M_A M_B とたわみ角 θ_A，θ_B との関係すなわちたわみ角式を求めれば次式のごとくえられる．

$$\left.\begin{aligned}
M_{AB} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B) - \frac{2l^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^3} \{2 + (-1)^n\} \\
M_{BA} &= \frac{2EI}{l}(\theta_A + 2\theta_B) - \frac{2l^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^3} \{1 + 2(-1)^n\}
\end{aligned}\right\} \text{------------------------} (5)$$

ただし，既往のたわみ角式と記号を合わせるため，$M_A = -M_{AB}$，$\theta_A = -\theta_A$，$M_B = M_{BA}$ を転換途上において考慮した．

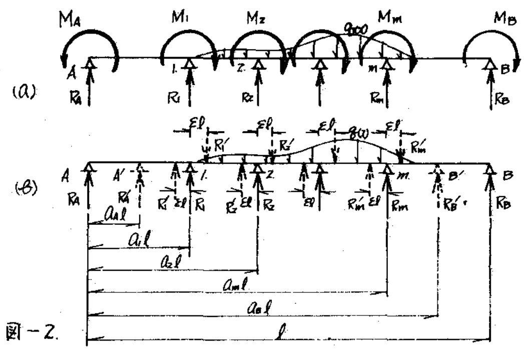
式（5）の右辺第2項は荷重項であり，式（5）は既往の3次数函数により誘導される部材回転角がない場合のたわみ角式と一致する．

3．各支点に反力ならびに反力モーメントが生ずる場合のフーリエ級数による連続ばりおよびラーメンの解法

本章では図－2（a）に示すごとく，連続ばりに任意垂直荷重 $q(x)$ および両端A，Bに

端モーメントM_A，M_Bが作用し，各中間支点でそれぞれの反力R_1，R_2，……，R_mならびに反力モーメントM_1，M_2，……，M_mが発生するごとき連続ばりの解法を示すもので，2における連続ばりおよびラーメンの解法をさらに拡張したものである．

解析にあたり，端モーメントM_A，M_Bを仮想支点に作用する仮想反力R_A'，R_B'におきかえるとともに，各中間支点における反力モーメントM_1，M_2，……，M_mを一対の偶力（R_1'，$-R_1'$），（R_2'，$-R_2'$），……，（R_m'，$-R_m'$）に置きかえれば図－2（b）に示す連続ばりをうるから，これに関して2.同様の手順により全エネルギーUをもとめれば，図－2（b）の連続ばりの極限状態として図－2（a）の連続ばりに関する全エネルギーUを算出することができる．したがって，これにCastiglianoの定理を適用すれば，各中間支点1，2，……，mにおけるそれぞれの垂直変位d_1，d_2，……，d_mならびにたわみ角θ_1，θ_2，……，θ_m，両端のたわみ角θ_A，θ_Bと各中間支点1，2，……，mにおけるそれぞれの支点反力R_1，R_2，……，R_mならびに反力モーメントM_1，M_2，……，M_m，両端の端モーメントM_A，M_Bとの一連の関係式がえられ次のごとくなる．



図－2.

$$
\left.\begin{array}{l}
M_A\frac{\pi}{l}D_{1A}+R_1D_{11}+R_2D_{12}+\cdots\cdots+R_mD_{1m}-M_1\frac{\pi}{l}D_{11}'-M_2\frac{\pi}{l}D_{12}'-\cdots\cdots-M_m\frac{\pi}{l}D_{1m}'+M_B\frac{\pi}{l}D_{1B}=\frac{l}{2}D_1+F\cdot d_1\\
M_A\frac{\pi}{l}D_{2A}+R_1D_{21}+R_2D_{22}+\cdots\cdots+R_mD_{2m}-M_1\frac{\pi}{l}D_{21}'-M_2\frac{\pi}{l}D_{22}'-\cdots\cdots-M_m\frac{\pi}{l}D_{2m}'-M_B\frac{\pi}{l}D_{2B}=\frac{l}{2}D_2+F\cdot d_2\\
\text{-----------------------------------}\\
M_A\frac{\pi}{l}D_{mA}+R_1D_{m1}+R_2D_{m2}+\cdots\cdots+R_mD_{mm}-M_1\frac{\pi}{l}D_{m1}'-M_2\frac{\pi}{l}D_{m2}'-\cdots\cdots-M_m\frac{\pi}{l}D_{mm}'-M_B\frac{\pi}{l}D_{mB}=\frac{l}{2}D_m+Fd_m\\
M_A\frac{\pi}{l}D_{AA}+R_1D_{A1}+R_2D_{A2}+\cdots\cdots+R_mD_{Am}-M_1\frac{\pi}{l}D_{A1}'-M_2\frac{\pi}{l}D_{A2}'-\cdots\cdots-M_m\frac{\pi}{l}D_{Am}'-M_B\frac{\pi}{l}D_{AB}=\frac{l}{2}D_A+F\frac{l}{\pi}\theta_A\\
M_A\frac{\pi}{l}D_{BA}+R_1D_{B1}+R_2D_{B2}+\cdots\cdots+R_mD_{Bm}-M_1\frac{\pi}{l}D_{B1}'-M_2\frac{\pi}{l}D_{B2}'-\cdots\cdots-M_m\frac{\pi}{l}D_{Bm}'-M_B\frac{\pi}{l}D_{BB}=\frac{l}{2}D_B+F\frac{l}{\pi}\theta_B\\
M_A\frac{\pi}{l}\overline{D}_{1A}+R_1\overline{D}_{11}+R_2\overline{D}_{12}+\cdots\cdots+R_m\overline{D}_{1m}-M_1\frac{\pi}{l}\overline{D}_{11}'-M_2\frac{\pi}{l}\overline{D}_{12}'-\cdots\cdots-M_m\frac{\pi}{l}\overline{D}_{1m}'-M_B\frac{\pi}{l}\overline{D}_{1B}=\frac{l}{2}\overline{D}_1+F\frac{l}{\pi}\theta_1\\
M_A\frac{\pi}{l}\overline{D}_{2A}+R_1\overline{D}_{21}+R_2\overline{D}_{22}+\cdots\cdots+R_m\overline{D}_{2m}-M_1\frac{\pi}{l}\overline{D}_{21}'-M_2\frac{\pi}{l}\overline{D}_{22}'-\cdots\cdots-M_m\frac{\pi}{l}\overline{D}_{2m}'-M_B\frac{\pi}{l}\overline{D}_{2B}=\frac{l}{2}\overline{D}_2+F\frac{l}{\pi}\theta_2\\
\text{-----------------------------------}\\
M_A\frac{\pi}{l}\overline{D}_{mA}+R_1\overline{D}_{m1}+R_2\overline{D}_{m2}+\cdots\cdots+R_m\overline{D}_{mm}-M_1\frac{\pi}{l}\overline{D}_{m1}'-M_2\frac{\pi}{l}\overline{D}_{m2}'-\cdots\cdots-M_m\frac{\pi}{l}\overline{D}_{mm}'-M_B\frac{\pi}{l}\overline{D}_{mB}=\frac{l}{2}\overline{D}_m+F\frac{l}{\pi}\theta_m
\end{array}\right\}\cdots(6)
$$

こゝに，M_A，M_B，R_1，R_2，……，R_m，M_1，M_2，……，M_mの係数および右辺第一項は連続ばりの形状ならびに連続ばりに作用する任意垂直荷重$q(x)$により求まる諸値である．

M_A，M_B，R_1，R_2，……，R_m，M_1，M_2，……，M_m，θ_A，θ_B，d_1，d_2，……，d_m，θ_1，θ_2，……，θ_mのうちいずれか$2m+2$個既知であれば；式（6）の諸式が連立に解け，図－2（a）に示す連続ばりの解がえられることになる．

4．結語　フーリエ級数を用いて連続ばりあるいはラーメンを解く本法は，既往のはり理論における解法と比較するとき，連続ばりおよびラーメンを解く問題が式（4），（6）に示すごとき多元一次連立方程式を解くだけの簡単な内容となること，不静定力を未知数として連立方程式をたてるためこれら不静定力が直接算出されること，また必要とあれば任意点のたわみ量およびたわみ角を他の不静定力と同時に算出することができること，よ

らには連続ばりの反力影響線を求めることも可能であること等の特長を利点として認めうる．

しかし，式(4)，(6)に含まれる各係数はそれぞれ級数和の形で示されるため，準備段階としてのこれら係数の計算がかなりめんどうであり，また求めんとする不静定反力，不静定モーメント，たわみ量およびたわみ角の全てを未知数として連立方程式がたてられるため，式の数が一般に多くなる傾向にある等の事実が以前ならば欠点として数えられるべきかとも思うが，今日では電算の利用と附表化により大した負担とは考えられない．しかし，連続ばりおよびラーメン自体の解析に本法を用いても，他の方法に比較して著るしく利益をうるとは一概に断言できないが，冒頭にも述べたごとく，はりと板とが組合さった構造物の解析においては，本論文に示したフーリエ級数による連続ばりおよびラーメンの解法が極めて威力を発揮し，今日まで代数函数では解析困難であったこの種の問題を，本法の適用により比較的簡単に解きうることが判明し，これらについては逐次発表の予定である．

文献 (1) 岡元北海：弾性ばりに支持される連続版の解法ならびに弾性ばりの捩りモーメントが連続版に及ぼす影響について，
土木学会論文集第19号，昭和29年4月；　北海道土木試験所報告第15号，昭和31年7月，

(2) 成岡昌夫：接角撓度法による一方向連続版の解法，土木学会論文集第4号，昭和24年6月，

(3) Seng-Lip Lee: Analysis of Continuous Beams by Fourier Series. Trans. A.S.C.E., vol.124, 1959.

(4) 宮入武夫：Building Frames の一解法について，第15回応用力学連合講演会 論文抄録集，昭和40年．

(5) 山崎・榎木：任意垂直荷重を受ける点支承上の無梁板の解法，土木学会西部支部昭和40年度研究発表会テキスト．