II－2　六角形孔を有する板がせん断力を受けるときの孔縁応力解析

九州大学　教授　山崎徳也
九州大学　大学院　○後藤恵之輔

1．緒言

有孔板の応力解析は二次元弾性問題の代表的なものであり、既に多くの研究がなされているが、その多くは円孔、楕円孔、あるいは矩形孔についての応力分布を論じたものである。最近、橋梁その他の構造物に多く用いられる六角形孔を有する板や梁を二次元弾性問題として取扱う場合には、所定の外縁を有する板(梁)に六角形の孔を穿った一つの有孔板と見做し、その外縁に種々の面内荷重が働くものと考えて応力の計算を行なえばよい。しかし、このように内外にそれぞれ境界を有する板の応力を理論的に解析することは非常に困難である故、著者等は、その基礎的な計算として、多少凹凸のある、隅角部を円めた近似六角形孔を有する無限板が面内荷重として一様なせん断力を受けるときの孔縁応力式を誘導し、隅角部の円味が孔縁応力に及ぼす影響について理論的考察を行なった。

2．近似六角形の式

直角座標の原点を中心とし、一辺がx軸に直交するような近似六角形の式[1]は次の如く表わされる。

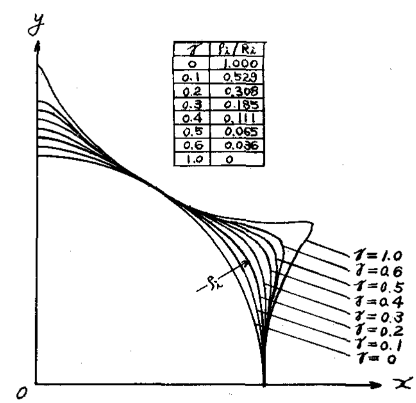
$$
\left.\begin{aligned}
x &= a(5e^{\alpha}\cos\beta - \gamma e^{-5\alpha}\cos 5\beta)\\
y &= a(5e^{\alpha}\sin\beta + \gamma e^{-5\alpha}\sin 5\beta)
\end{aligned}\right\}\qquad (1)
$$

ここに　a ；孔の大きさを定める任意の正数

α ；$0 \leqq \alpha \leqq \infty$　　　β ；$-\pi \leqq \beta \leqq \pi$

γ ；孔の円味を支配する正数，$0 \leqq \gamma \leqq 1$

本論文において取扱う六角形孔には上式において$\alpha=0$と置いたものを用い、その第1象限を図示すれば図－1の如くである。図においてρ_iは隅角部の曲率半径を表わし，γの種々の値に対するρ_i/R_iの値は図中の附表に示す通りであるが、R_iは中心より隅に至るまでの距離であり、図示の如く、$\gamma=0.3$のとき一辺はほとんど直線となるが、他の場合は曲線となり、$\gamma=0$においては円形となる。



γ	ρ_i/R_i
0	1.000
0.1	0.529
0.2	0.308
0.3	0.185
0.4	0.111
0.5	0.065
0.6	0.036
1.0	0

図－1

3．応力の計算

本論の計算法は，太田博士の一般的有孔板応力解法[2]に基づくものであり、基礎方程式$\nabla^4\chi=0$の本論に適応する一般解を求め、それより必要な応力函数を選び出すものである。

(i)　応力および応力函数の一般式

平面応力の式は、Airyの応力函数をχとして，次の如く表わされる。

$$
\widehat{xx} = \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\ ,\qquad \widehat{yy} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\ ,\qquad \widehat{xy} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}\qquad (2)
$$

これを曲座標で表わせば

$$
\left.
\begin{aligned}
\widehat{\alpha\alpha} &= \frac{1}{25a^2J^2}\left\{ J\frac{\partial^2\chi}{\partial\beta^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\frac{\partial J}{\partial\alpha} - \frac{\partial\chi}{\partial\beta}\frac{\partial J}{\partial\beta} \right)\right\} \\
\widehat{\beta\beta} &= \frac{1}{25a^2J^2}\left\{ J\frac{\partial^2\chi}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\beta}\frac{\partial J}{\partial\beta} - \frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\frac{\partial J}{\partial\alpha} \right)\right\} \\
\widehat{\alpha\beta} &= \frac{1}{25a^2J^2}\left\{ -J\frac{\partial^2\chi}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\beta}\frac{\partial J}{\partial\alpha} + \frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\frac{\partial J}{\partial\beta} \right)\right\}
\end{aligned}
\right\} \qquad (3)
$$

ここに $\qquad J = \frac{1}{25a^2}\left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2 \right\}$

しかるにAiryの応力函数は次の基礎方程式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial^4\chi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\chi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\chi}{\partial y^4} = 0 \qquad (4)$$

式(4)の本論に適応する一般解は式(1)を用いて次の如く求められる。

$$
\begin{aligned}
\chi = {} & A_0\alpha + B_0\beta + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{n\alpha} + B_n e^{-n\alpha} \right) \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\Big\} n\beta \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\frac{5}{2} e^{(n+1)\alpha} \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\Big\}(n-1)\beta - \frac{1}{2}\gamma e^{(n-5)\alpha} \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\Big\}(n+5)\beta \right] \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left[\frac{5}{2} e^{-(n-1)\alpha} \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\Big\}(n+1)\beta - \frac{1}{2}\gamma e^{-(n+5)\alpha} \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\Big\}(n-5)\beta \right] \\
& + \begin{smallmatrix}E_1\alpha\\ E_2\beta\end{smallmatrix}\Big\}\left(5e^{\alpha}\cos\beta - \gamma e^{-5\alpha}\cos 5\beta \right) + \begin{smallmatrix}F_1\alpha\\ F_2\beta\end{smallmatrix}\Big\}\left(5e^{\alpha}\sin\beta + \gamma e^{-5\alpha}\sin 5\beta \right)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

ここに，A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n, E_1, E_2, F_1, F_2 は未定常数，$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ である。

(ii) 境界条件および孔縁応力

孔縁における境界条件は $\qquad \widehat{\alpha\alpha} = 0, \quad \widehat{\alpha\beta} = 0 \qquad (6)$

有孔板が一様なせん断力を受けるときの応力函数は一般に次のように置くことができる。

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\alpha) \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\Big\} n\beta \qquad (7)$$

ここに χ_0 は孔の無い場合の応力函数であり，χ_1 は $\chi = \chi_0 + \chi_1$ によって式(6)の境界条件を満足し，孔から充分遠く離れた所では χ_1 のみを用いた $\widehat{xx}$, $\widehat{yy}$, $\widehat{xy}$ が消失するような函数である。式(7)を式(6)に代入して

$$
\left.
\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\Big\{ n^2\left(e^{2\alpha} + \gamma^2 e^{-10\alpha}\right)F_n - \left(e^{2\alpha} - 5\gamma^2 e^{-10\alpha}\right)\frac{dF_n}{d\alpha} \Big\} \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\Big\} n\beta \\
& \quad + \gamma e^{-4\alpha}\Big\{ n(n-3)F_n + 2\frac{dF_n}{d\alpha} \Big\} \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\Big\}(n+6)\beta + \gamma e^{-4\alpha}\Big\{ n(n+3)F_n + 2\frac{dF_n}{d\alpha} \Big\} \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\Big\}(n-6)\beta \Big] = 0 \\
& \sum_{n=0}^{\infty}\Big[n\Big\{ \left(e^{2\alpha} - 5\gamma^2 e^{-10\alpha}\right)F_n - \left(e^{2\alpha} + \gamma^2 e^{-10\alpha}\right)\frac{dF_n}{d\alpha} \Big\} \begin{smallmatrix}\sin\\ -\cos\end{smallmatrix}\Big\} n\beta \\
& \quad - \gamma e^{-4\alpha}\Big\{ 2nF_n + (n+3)\frac{dF_n}{d\alpha} \Big\} \begin{smallmatrix}\sin\\ -\cos\end{smallmatrix}\Big\}(n+6)\beta - \gamma e^{-4\alpha}\Big\{ 2nF_n + (n-3)\frac{dF_n}{d\alpha} \Big\} \begin{smallmatrix}\sin\\ -\cos\end{smallmatrix}\Big\}(n-6)\beta \Big] = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (8)
$$

上式が β の値のいかんに拘らず成立するための条件より次式を得る。

$$\frac{dF_0}{d\alpha} = 0, \quad F_n = 0, \quad \frac{dF_n}{d\alpha} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \qquad (9)$$

式(3)を用うれば所要の孔縁応力は次の如く極めて簡単になる。

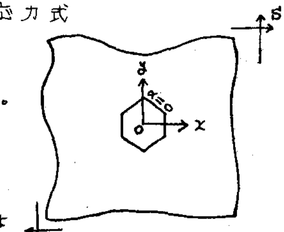
$$\left(\widehat{\beta\beta}\right)_{\alpha=0} = \frac{1}{25a^2J}\frac{\partial^2\chi}{\partial\alpha^2} \qquad (10)$$

4．無限の遠方において一様なせん断力 S が働くときの孔縁応力式

(i) 孔縁の一辺が x 軸に直交する場合（図－2）

この際の孔の無い場合の応力函数 χ_0 は次の如く置くことができる。

$$
\begin{aligned}
\chi_0 &= -Sxy \\
&= Sa^2\left\{ -\frac{25}{2}e^{2\alpha}\sin 2\beta - 5\gamma e^{-4\alpha}\sin 4\beta + \frac{\gamma^2}{2}e^{-10\alpha}\sin 10\beta \right\} \qquad (11)
\end{aligned}
$$



図－2

これに対する χ_1 は $\alpha = \infty$ において $\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x^2} \approx 0$, $\frac{\partial^2\chi_1}{\partial y^2} \approx 0$, $\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x\partial y} \approx 0$ となるような項を式(5)から選び出せばよい。すなわち，式(11)を参照して

$$\chi_1 = S a^2 \{ B_2 e^{-2\alpha} \sin 2\beta + B_4 e^{-4\alpha} \sin 4\beta + B_6 e^{-6\alpha} \sin 6\beta + B_8 e^{-8\alpha} \sin 8\beta$$
$$+ B_{10} e^{-10\alpha} \sin 10\beta + D_1 (\tfrac{5}{2} \sin 2\beta + \tfrac{1}{2}\gamma e^{-6\alpha} \sin 4\beta)$$
$$+ D_3 (\tfrac{5}{2} e^{-2\alpha} \sin 4\beta + \tfrac{1}{2}\gamma e^{-8\alpha} \sin 2\beta) + D_5 \cdot \tfrac{5}{2} e^{-4\alpha} \sin 6\beta$$
$$+ D_7 (\tfrac{5}{2} e^{-6\alpha} \sin 8\beta - \tfrac{1}{2}\gamma e^{-12\alpha} \sin 2\beta) + D_9 (\tfrac{5}{2} e^{-8\alpha} \sin 10\beta - \tfrac{1}{2}\gamma e^{-14\alpha} \sin 4\beta) \} \quad (12)$$

故に式(11)と式(12)とを加えて

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 = S a^2 (F_2 \sin 2\beta + F_4 \sin 4\beta + F_6 \sin 6\beta + F_8 \sin 8\beta + F_{10} \sin 10\beta) \quad (13)$$

ここに

$$F_2 = -\frac{25}{2} e^{2\alpha} + B_2 e^{-2\alpha} + \frac{5}{2} D_1 + \frac{1}{2}\gamma e^{-8\alpha} D_3 - \frac{1}{2}\gamma e^{-12\alpha} D_7$$
$$F_4 = \frac{5}{2} e^{-2\alpha} D_3 + (B_4 - 5\gamma) e^{-4\alpha} + \frac{1}{2}\gamma e^{-6\alpha} D_1 - \frac{1}{2}\gamma e^{-14\alpha} D_9$$
$$F_6 = B_6 e^{-6\alpha} + \frac{5}{2} e^{-4\alpha} D_5 \qquad F_8 = B_8 e^{-8\alpha} + \frac{5}{2} e^{-6\alpha} D_7$$
$$F_{10} = (B_{10} + \frac{\gamma^2}{2}) e^{-10\alpha} + \frac{5}{2} e^{-8\alpha} D_9$$

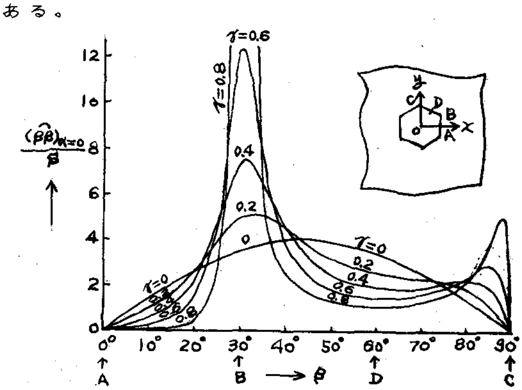
孔縁における境界条件式(9)によって式(13)の未定常数を決定すれば次の如く得られる。

$$B_2 = -\frac{1}{2}\,\frac{625+125\gamma^2}{25-3\gamma^2}, \quad B_4 = -\frac{250\gamma}{25-3\gamma^2} + 5\gamma, \quad B_6 = 0, \quad B_8 = 0, \quad B_{10} = -\frac{1}{2}\gamma^2$$
$$D_1 = \frac{250}{25-3\gamma^2}, \quad D_3 = \frac{50\gamma}{25-3\gamma^2}, \quad D_5 = 0, \quad D_7 = 0, \quad D_9 = 0$$

これらの常数を式(13)に代入し、式(10)より孔縁応力を求めれば次の如くなる。

$$\frac{(\widehat{\beta\beta})_{\alpha=0}}{S} = \frac{-500\left(\frac{5-3\gamma^2}{25-3\gamma^2}\right)\sin 2\beta + \frac{1000\gamma}{25-3\gamma^2}\sin 4\beta}{25(1+\gamma^2+2\gamma\cos 6\beta)} \quad (14)$$

計算結果は図－3(a)に示す如くで、横軸にβを、縦軸に$(\widehat{\beta\beta})_{\alpha=0}/S$を採って$\gamma$の5種の値に対して計算した応力をプロットしたものである。



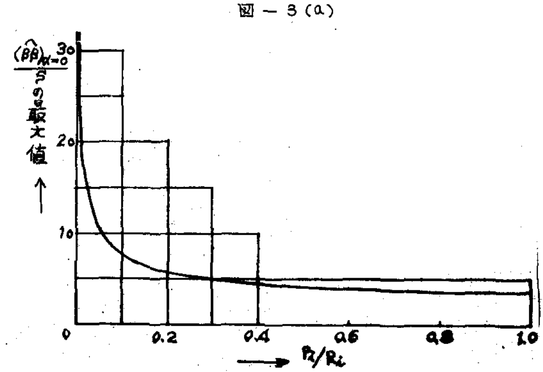
図－3(a)

同図によれば最大応力は必ずしも隅角部の円味の頂点で起るとは限らないが，$\gamma \gtrsim 0.3$では、頂点で起ると考えてよい。従って、式(14)に$\beta = 30°$を代入して最大応力の式は次の如く得られる。

$$\text{max. value of } \frac{(\widehat{\beta\beta})_{\alpha=0}}{S} = \pm \frac{10\sqrt{3}(3\gamma+5)}{(1-\gamma)(25-3\gamma^2)} \quad (15)$$

（＋：tension ；－：compression）

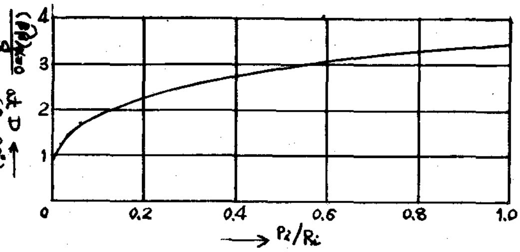
これをρ_i/R_iを用いて図示すれば図－4(a)の通りであるが、図に見るように、ρ_i/R_iが0.1より小さい範囲内では最大応力は急速に増大し，これより比が大きくなるとその変化は緩慢となり、円のとき（$\gamma=0$, $\rho_i/R_i=1.0$）には式(14)より孔の無いときの応力Sの4倍と算出される。また、正六角形孔の直線部に相当する$\beta = 60°$の応力は、図－4(b)に示す如く、ρ_i/R_iが0から1に，すなわち，六角形孔が円孔に近づくにつれて、$(\widehat{\beta\beta})_{\alpha=0}/S$は約0.8から3.5まで増加する。



図－4(a)

隅角部の曲率半径の変化に応じて六角形孔の

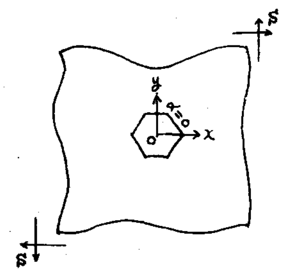
各辺が曲線となることは前述の通りである。従って、実際問題を論ずる場合には、辺が直線とする場合の応力に換算するため本来、計算結果に適当な修正を加えねばならないが、上記の結果から直線部に相当する$\beta = 60°$の応力はそれ程大きくないので、隅角部における応力は、辺の中央に多少の凹凸があっても、これを正六角形孔の隅に円味をつけた孔の隅角部応力を直ちに表わすと見做して差支えない。



図－4(b)

橋梁の主桁等が受ける応力は極めて複雑であるが、縁材および隣接孔の影響を無視すれば、桁がせん断力を受けるとき、その中立軸部分に六角形孔を穿った場合は、上記考察とほゞ類似しているものと考えてよい。そこで穿孔する場合、応力集中を避けるために隅角部にfilletをつけるならば、その半径は少なくとも中心より隅に至るまでの距離の0.3倍位にすればよい。これ位のfilletをつければ、隅角部の最大応力は孔の無いときの応力Sの約5倍である(円孔の場合は4倍である)。

(ii) 孔縁の一辺がy軸に直交する場合



図－5

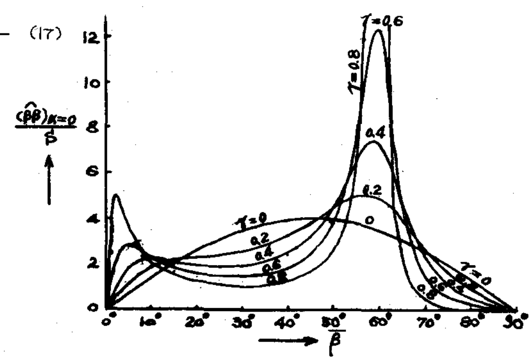
孔の位置が図－5の如き場合には、既述の計算式中のγを$-\gamma$に、βを$\beta-\pi/6$ ($=\bar{\beta}$と記す)に置換すればよい。

従って、孔の周辺は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} x &= a(5\cos\bar{\beta} + \gamma\cos 5\bar{\beta}) \\ y &= a(5\sin\bar{\beta} - \gamma\sin 5\bar{\beta}) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

また、孔縁応力は式(14)を用いて直ちに次の如く得られる。

$$\frac{(\widehat{\beta\beta})_{\alpha=0}}{S} = \frac{-500\left(\frac{5-3\gamma^2}{25-3\gamma^2}\right)\sin 2\bar{\beta} - \frac{1000\gamma}{25-3\gamma^2}\sin 4\bar{\beta}}{25(1+\gamma^2-2\gamma\cos 6\bar{\beta})} \qquad (17)$$



図－3(b)

計算結果は、図－3(b)に示す通りであるが図に見るように、(i)の場合の応力図、図－3(a)と$\beta=45°$を軸として対称であるに過ぎない。

5、結言

本論文は、正六角形孔を有する板や梁の面内に一様なせん断力が作用するときの孔縁に生ずる応力を知るために、隅を円めた近似六角形孔を有する無限板を考えて孔縁応力を計算し、隅角部の円味の影響を理論的に考察したものであるが、孔縁応力に関する限り、隅の円め方によって応力集中を避け、円孔を穿った場合とほゞ同じ効果にまで近づけ得ることを示した。

参考文献 (1) 浅羽隆太郎；有孔板に於ける応力に就いて．造船協会々報才42号 昭和3年4月

(2) 太田友彌；隅を円めた長方形孔を有する板の周辺応力に就いて．造船協会々報才54号 昭和9年10月