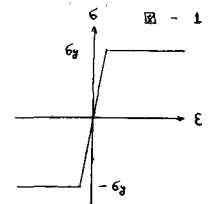


II - 1 横荷重を受ける部材の弾塑性座屈について

九州大学 教授 山崎徳也

九州大学 大学院 ○ 速木昭正

概要 横荷重を受け軸方向に圧縮される部材の設計は鉄骨構造において偏心圧縮材の設計と同様に極めて重要な問題である。偏心圧縮材が安定問題に属するということを知りて示しこれに対する理論解を与えたのは Kármán である。すなわち真の耐力はいかなる座屈荷重は最大繰応力が降伏応力に達するときの荷重ではなく、材軸のたわみが安定状態から不安定状態に移るとき荷重で与えられるということを提案した。その後 Jélik は Kármán の理論に基づき材料の応力-歪線を図-1のごとく理想化してこの問題に対する厳密解および近似解⁽¹⁾を求めたがとらに横荷重を伴う部材の安定問題にまで拡張し横荷重を受け軸方向に圧縮される矩形断面の単純支持部材に対してその軸線のたわみ形を仮定することにより境界条件を省略しうる近似解⁽²⁾を提案し、厳密解と極めて良く合致することを実証しているが、横荷重と軸荷重の比が常に一定であるという仮定が含まれており一般性に欠ける難点が残存している。したがって著者等は実際的な問題を包含しうるごとく一般化し、任意の横荷重の影響を考慮した部材の安定問題を論じ真の耐力を求めその結果を実用便ならしめるごとく図表化した。



なお本研究では Jélik と同じく次の仮定を採用した。

- (A) 材料はすべて完全塑性体とし応力-歪線は図-1で表わされる。
- (B) 両端単純支持矩形等断面直線材を取扱う。
- (C) Navier の平面保持の法則が成立するものとする。

I. 基本的考察

図-2に示すスパン l で $b \times h$ の矩形断面の単純支持部材が軸荷重 P および等分布横荷重 w を受けるとき断面に生ずる応力分布には次の三種類が考えられる。すなわち応力が最大になる中央断面 ($x=l/2$) について考察すれば、 P, w の値が小さく圧縮および引張の繰応力 σ_1, σ_2 が共に降伏応力 σ_y 以下のいはゆる弾性状態を応力状態 A と名付ける。次に荷重が次第に増してまず圧縮縁に降伏領域が発生する状態を応力状態 B とする。とらに荷重が増加すれば引張縁にも降伏領域が生じこれを応力状態 C と名付ける。いま各応力状態に対する曲率 $1/\rho$ と軸荷重の関係を求めれば以下のごとくである。

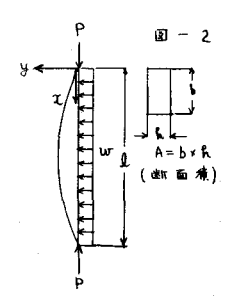
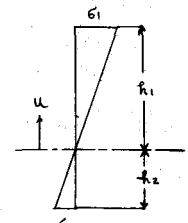


図-3

- (1) 応力状態 A ($\sigma_1, \sigma_2 < \sigma_y$ 図-3参照)

内力と外力の釣合より $\int_A \sigma dA = P$, $\int_A \sigma u dA = M$ (1)
式(1)より中立軸の位置 h_1, h_2 および繰応力 σ_1, σ_2 が求まり曲率とモーメントの関係は次式となる。



$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{12 M}{b h^3 E} \quad (2)$$

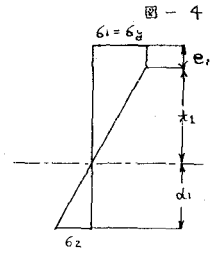
(2) 応力状態 B ($\sigma_1 = \sigma_y$, $\sigma_2 \leq \sigma_y$ 図-4 参照)

同じく釣合条件式より降伏領域 C 中立軸の位置および曲率は次式となる。

$$e_1 = \frac{3M}{b h (\sigma_y - \sigma_0)} - \frac{h}{2}$$

$$x_1 = \frac{9 h \left[(\sigma_y - \sigma_0) - 2M / b h^2 \right]^2}{8 (\sigma_y - \sigma_0)^3} \sigma_y \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{\sigma_y}{x_1 E} = - \frac{8 (\sigma_y - \sigma_0)^3}{9 E h \left[(\sigma_y - \sigma_0) - 2M / b h^2 \right]^2} \quad (4)$$



部材の中央点の圧縮線が降伏するとき ($\sigma_1 = \sigma_y$) の限界たわみ y_1 は

$$e_1 = 0 \text{ より } y_1 = \frac{h}{6} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1 - \frac{3 f \sigma_y}{\sigma_0} \right) \quad (5)$$

ここに $f = \omega / \omega_y$, $\omega_y = 16 b \sigma_y / \lambda^2$: 等分布横荷重の
みによって部材の中央点で降伏するときの降伏荷重を表す

同じく中央点の引張線が降伏するとき ($\sigma_2 = \sigma_y$) の限界たわみ y_2 は $d_1 = 0$ より

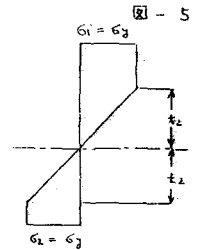
$$y_2 = \frac{h}{6} \left\{ \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1 \right) \left(\frac{2 \sigma_0}{\sigma_y} + 1 \right) - \frac{f \sigma_y}{\sigma_0} \right\} \quad (6)$$

(3) 応力状態 C ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y$ 図-5 参照)

釣合条件式より中立軸の位置および曲率は次式となる。

$$x_2 = h \sqrt{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_y^2} \right) - \frac{3M}{b h^2 \sigma_y}} \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{\sigma_y}{E h \sqrt{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_y^2} \right) - \frac{3M}{b h^2 \sigma_y}}} \quad (8)$$



この応力状態において可能な最大たわみ y_m は $e_2 = 0$ より

$$y_m = \frac{h}{4} \left\{ \left(1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_y} \right) \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} - 1 \right) - \frac{2 f \sigma_y}{3 \sigma_0} \right\} \quad (9)$$

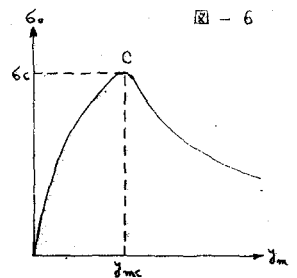
II. 限界軸応力の決定

一般に完全塑性体が図-2のような荷重を受けるとき部材中央点のたわみ y_m と軸応力 σ_0 の関係は図-6のごとくなり頂点 C の応力が限界軸応力 σ_c と与え理論的には $d \sigma_0 / d y_m = 0$ で決定しうることが分る。

いま軸線のたわみを正弦函数で近似すれば σ_0 と y_m の関係式を各応力状態に対してそれぞれ以下のごとく簡単に求める。すなわち

$$y = y_m \sin \frac{\pi x}{l} \quad (10)$$

中央点の曲率は $\frac{1}{\rho_m} = \left[\frac{d^2 y}{d x^2} \right]_{x = \frac{l}{2}} = - \frac{\pi^2}{l^2} y_m \quad (11)$



(1) 応力状態 A

式(2)と式(11)を等置し $M = P y_m + W l^2 / 8$ なる関係を考慮すれば

$$y_m = \frac{f \lambda^2 g_y l}{2 (E \pi^2 - \lambda^2 G_c)} \quad (12)$$

しかるに上式は $0 < G_c \leq G_p < E \pi^2 / \lambda^2$ (ただし G_p は式-(18)で表わされる弾性限界時の繰応力を示す) の範囲では G_c に関する単調増加函数であるから極値は存在しえずかかる状態における限界応力はありえないことがわかる。このことは実際にはオイラー荷重によって座屈する前に弾塑性応力状態 B あるいは C に移行することを示すもので横荷重をうける場合の真の耐力はオイラー荷重では与えられないことを明示している。

(2) 応力状態 B

式(4)と式(11)とを等置すれば y_m と G_c の関係式が次式のごとくえられる。

$$9 E y_m \left[\frac{h}{2} \left(\frac{G_y}{G_c} - 1 \right) - y_m - \frac{f h}{6} \left(\frac{G_y}{G_c} \right) \right]^2 - 2 G_c h \left(\frac{G_y}{G_c} - 1 \right) \frac{l^2}{\pi^2} = 0 \quad (13)$$

限界軸応力 G_c およびその時のたわみ y_m は G_c より $d G_c / d y_m = 0$ および式(13)よりえられる条件

$$y_m \neq \frac{h}{2} \left(\frac{G_y}{G_c} - 1 \right) - \frac{f h}{6} \left(\frac{G_y}{G_c} \right) \quad \text{を用いて次式のごとくなる。}$$

$$y_{mc} = \frac{1}{3} \left[\frac{h}{2} \left(\frac{G_y}{G_c} - 1 \right) - \frac{f h}{6} \left(\frac{G_y}{G_c} \right) \right]$$

$$G_c = \frac{E \pi^2}{\lambda^2} \left[\frac{\frac{G_y}{G_c} - 1 - \frac{f}{3} \left(\frac{G_y}{G_c} \right)}{\frac{G_y}{G_c} - 1} \right] \quad (14)$$

上式に $g = G_c / G_y$ ($g_c = G_c / G_y$) を代入して限界軸応力に対する限界細長比を求めると

$$\lambda^2 = \frac{E \pi^2}{G_y g_c} \left[\frac{1 - g_c - 3/f}{1 - g_c} \right]^3 \quad (15)$$

式(15)の適用範囲は $0 \leq g_m \leq g_H$ の条件より $g_1, g_2 = 0.5 \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - 4f/3} \right\}$ とおくと $g_1 \leq g \leq g_2$ ただし $0 \leq f \leq 3/4$

(3) 応力状態 C

式(8)と式(11)とを等置することにより y_m と G_c の関係は次式となる

$$y_m \sqrt{\frac{G_y}{4 G_c} \left(1 - \frac{G_c^2}{G_y^2} \right)} h - y_m - \frac{f}{6} \left(\frac{G_y}{G_c} \right) h - \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{G_y^3}{3 E h^3 G_c}} = 0 \quad (16)$$

限界軸応力およびその時のたわみは $d G_c / d y_m = 0$ より決まると考えられる。

$$y_m = \frac{h G_y}{6 G_c} \left(1 - \frac{G_c^2}{G_y^2} \right) - \frac{f}{6} \left(\frac{G_y}{G_c} \right) h$$

$$\lambda^2 = \frac{E \pi^2}{g_c G_y} \sqrt{\left(1 - g_c^2 - \frac{2}{3} f \right)^3} \quad (17)$$

式(17)の適用範囲は $y_m > y_H > 0$ の条件より $g_3 = \sqrt{1 - 2f/3}$ とおくと

$$0 \leq g \leq g_1 \quad \text{および} \quad g_2 \leq g \leq g_3 \quad \text{ただし} \quad 0 \leq f \leq 3/2$$

また横荷重が増大して $f \geq 3/4$ となると応力状態は C となり式(15)に代って式(17)が適用される。

Ⅲ. 降伏軸応力

比較の意味で部材の中央奥が降伏するときの応力はゆる降伏軸応力 σ_p を求めると以下のようになる。おなわち式(2)を境界条件 $x=0$ で $y=0$; $x=l$ で $y=0$ を用いて解くと中央奥のたわみは

$$y_m = -\frac{C_1 l}{C_1^2} \frac{\sin C_1 l / 2}{\sin C_1 l} + \frac{C_2 l}{2 C_1^2} \left(C_1^2 = \frac{12 P}{b R^3 E}, C_2 = -\frac{6 W l}{b R^3 E} \right)$$

中央奥の圧縮縁応力 σ_c は W を部材の断面係数とすると周知のごとく次式となる。

$$\sigma_c = P / A + M / W$$

$M = P y_m + W l^2 / 8$ および $\sigma_c = \sigma_g$ とおけば細長比と σ_p との関係は次式のごとくなる。

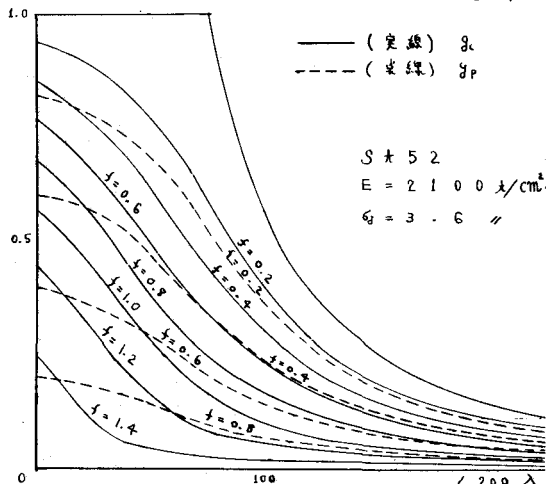
$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{E}{g_p g_g}} \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{1 - g_p}{f} \right) \quad \left(g_p = \frac{\sigma_p}{\sigma_g} \right) \quad (18)$$

Ⅳ. 限界軸応力と細長比のグラフ

式(15)と式(17)を用いて与えられた横荷重および細長比に対する限界応力を直接求めることは可成り困難であるのでこれを図表化して実用に便ならしめた。以下のグラフは $S \times 52$ の鋼材に対する与えられた横荷重係数 f における限界軸応力 σ_c , 細長比 λ の関係である。

$$g_c = \sigma_c / \sigma_g$$

図-7



註記 以上の考察より等分布横荷重および細長比が限界軸荷重におよぼす影響を簡単に求めることが可能となり、また中央集中横荷重 Q に対しても以上の計算法がそのまま適用でき、式(15), (17)における横荷重係数を $f = Q / Q_0$ ($Q_0 = 4 b R W / \sqrt{A}$; 中央集中横荷重のみにより部材の中央奥が降伏するときの荷重を表わす)とおけばよい。なお横荷重係数 f に対する実際の横荷重の大きさ W または Q は与えられた限界軸荷重に対する細長比および断面の大きさ b, R を用いて計算されこれを図表化すれば逆に与えられた横荷重 W, Q に対する適当な f, g_c, λ が求まることになる。

参考文献

- (1) K. Ježek "Näherung berechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe" Stahlbau 1935
- (2) K. Ježek "Die Tragfähigkeit des gleichmäßig überbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen" Stahlbau 1935