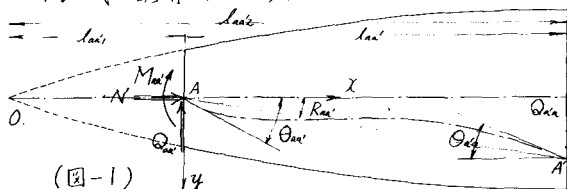


変断面材の挫屈撓角式の誘導

九州大学工学部 正員 山崎 徳也
学生員 瀬川 宗亮

挫屈撓角法は定断面材を対象として1931年坂⁽¹⁾氏がこれを確立して以来、樋浦⁽²⁾、小西⁽³⁾氏等により応用拡張され、骨組の挫屈荷重計算の手段として非常に重要な位置を占めている。本研究は各種実用変断面材にも適用出来るごとく本法の一般的拡張を企図したもので、凡そ変断面を含むすべての骨組構造の挫屈解析に用いて極めて有用かと考える。

1. 式の誘導 (図-1参照)



(図-1)

今、部材A-A'の断面が(1)式の仮定に従って変化するものとする。

即ち、任意点Xに於ける断面二次モーメントは、

$$I = I_{aa'} f(\xi) \quad \text{----- (1)}$$

ここに $I_{aa'}$ は $x = l_{aa'}$ に於ける基準断面二次モーメントであり、 $\xi = x/l_{aa'}$ とする。

次に X 点の曲げモーメントは、次の如く得られる。

$$M = M_{aa'}(1-\xi) - M_{aa'}\xi + N(y - \Delta\xi) \quad \text{----- (2)}$$

$d^2y/dx^2 = -M/EI$ に (1), (2) 式を代入すれば、直ちに次の微分方程式を得る。

$$\frac{EI_{aa'} f(\xi)}{l_{aa'}^2} \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2} + N \cdot y = -M_{aa'}(1-\xi) + M_{aa'}\xi + N\Delta\xi \quad \text{----- (3)}$$

(3) 式の特解は容易に分る如く $-\frac{M_{aa'}}{N}(1-\xi) + \frac{M_{aa'}}{N}\xi + \Delta\xi$ である。今その一般解を $Y(\xi)$ で表わせば (3) 式の完全解は 2 次式となる。

$$y = Y(\xi) - \frac{M_{aa'}}{N}(1-\xi) + \frac{M_{aa'}}{N}\xi + \Delta\xi \quad \text{----- (4)}$$

$$(4) \text{ 式を (2) 式に代入すれば } M = N \cdot Y(\xi) \quad \text{----- (5)}$$

(3) 式は二階微分方程式であるから (4) 式は、その積分定数を含むと考えられる。ここで (5) 式より $M_{aa'} = N \cdot Y(0)$, $M_{aa'} = N \cdot Y(l_{aa'})$ を境界条件として与えれば (3) 式は解ける事になり、後は普通行われている弾性曲線を用いて撓角式を導く手法により式の誘導が可能となる。

以上で分る様に、此の問題は (3) 式の一般解即ち $Y(\xi)$ を求める事にあるといえる。ここではこの一般解がベッセルの微分方程式並びにオイラーの微分方程式 (同次線型微分方程式) で解ける様な $f(\xi)$ について (3) 式を解き、その結果を示した。なお、その具体的な応用範囲は次記するごとく、数理的取扱可能なものは一応つくしたと言える。

(a) 定断面材の場合 $f(\xi) = 1$

(b) 断面二次モーメントが一次的に変化する場合 $f(\xi) = (l_{aa'} + x)/l_{aa'}$
 例、矩形断面材 (高さ一定、中直線変化)

(c) 断面二次モーメントが二次的に変化する場合 $f(\xi) = (l_{aa'} + x)^2/l_{aa'}^2$
 例、中空組立材 (断面積一定、高さ直線変化)

(d) 断面二次モーメントが三次的に変化する場合 $f(\xi) = (l_{aa'} + x)^3/l_{aa'}^3$

○矩形断面材 (巾一定、高さ直線変化)

○楕円形断面材 (高さ又は巾のどちらか一方が直線変化)

(c) 断面二次モーメントが四次的に変化する場合 $f(\xi) = (laa' + x)^4 / laa_2^4$

○截頭円錐材

○截頭四角錐材

○截頭楕円錐材

2. 式の表示並びにその係数

以上より変断面材の撓屈撓角式は一般的に次の様式表示できる事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} M_{aa'} &= k_{aa'} (\alpha_{aa'} \varphi_{aa'} + \beta_{aa'} \varphi_{aa'} - (\alpha_{aa'} + \beta_{aa'}) \psi_{aa'}) \\ M_{aa} &= k_{aa'} (\beta_{aa'} \varphi_{aa'} + \alpha_{aa'} \varphi_{aa'} - (\alpha_{aa'} + \beta_{aa'}) \psi_{aa'}) \end{aligned} \right\} \text{----- (6)}$$

$$A \text{ 端がヒンジ結合の時 } M_{aa'} = k_{aa'} \delta_{aa'} (\varphi_{aa'} - \psi_{aa'}) , M_{aa} = 0 \text{----- (7)}$$

$$A \text{ 端がヒンジ結合の時 } M_{aa'} = 0 , M_{aa} = k_{aa'} \delta_{aa'} (\varphi_{aa'} - \psi_{aa'}) \text{----- (8)}$$

$$\text{但し, } k_{aa'} = E K_{aa'} / E_0 K_0 , \varphi = E_0 K_0 \theta , \psi = E_0 K_0 R \text{----- (9)}$$

又 (6), (7), (8) 式に於ける係数 $\alpha_{aa'}, \alpha_{aa}, \beta_{aa'}, \beta_{aa}$ は次記する如くである。

$$M_{aa'} = laa_2 / laa_1 , Z_{aa'} = (N laa' / E K_{aa'})^{1/2} \text{----- (10)}$$

$$(a) f(\xi) = 1$$

$$\alpha_{aa'} = \alpha_{aa} = Z_{aa'} (\sin Z_{aa'} - Z_{aa'} \cos Z_{aa'}) / \{ 2(1 - \cos Z_{aa'}) - Z_{aa'} \sin Z_{aa'} \}$$

$$\beta_{aa'} = \beta_{aa} = Z_{aa'} (Z_{aa'} - \sin Z_{aa'}) / \{ 2(1 - \cos Z_{aa'}) - Z_{aa'} \sin Z_{aa'} \}$$

$$\delta_{aa'} = \delta_{aa} = Z_{aa'}^2 \sin Z_{aa'} / (\sin Z_{aa'} - Z_{aa'} \cos Z_{aa'})$$

$$(b) f(\xi) = (laa' + x) / laa_2$$

$$\alpha_{aa'} = \left\{ \frac{1}{2} (1 + \mu_{aa'}) + \mu_{aa'}^{1/2} Z_{aa'} C_{11} \right\} / D , \alpha_{aa} = \left\{ \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{\mu_{aa'}}) + Z_{aa'} C_{22} \right\} / D$$

$$\beta_{aa'} = \beta_{aa} = (1 + \mu_{aa'}^{1/2} Z_{aa'} C_{12}) / D = (1 + Z_{aa'} C_{21}) / D$$

$$\delta_{aa'} = Z_{aa'}^2 / \left\{ \frac{1}{2} (1 + \mu_{aa'}) + \mu_{aa'}^{1/2} Z_{aa'} C_{11} \right\} , \delta_{aa} = Z_{aa'}^2 / \left\{ \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{\mu_{aa'}}) + Z_{aa'} C_{22} \right\}$$

$$D = \left\{ \frac{1}{2} (1 + \mu_{aa'}) + \mu_{aa'}^{1/2} Z_{aa'} C_{11} \right\} \left\{ \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{\mu_{aa'}}) + Z_{aa'} C_{22} \right\} - (1 + \mu_{aa'}^{1/2} Z_{aa'} C_{12}) (1 + Z_{aa'} C_{21})$$

$$C_{11} = \{ J_1(f) N_1(\xi) - J_1(\xi) N_1(f) \} / C , C_{12} = \{ J_1(\xi) N_1(\xi) - J_1(\xi) N_1(\xi) \} / C$$

$$C_{21} = - \{ J_1(f) N_1(f) - J_1(f) N_1(f) \} / C , C_{22} = - \{ J_1(f) N_1(\xi) - J_1(\xi) N_1(f) \} / C$$

$$C = J_1(f) N_1(\xi) - J_1(\xi) N_1(f) , f = 2 (laa_1 laa_2)^{1/2} Z_{aa'} / laa' , \xi = 2 laa_2 Z_{aa'} / laa'$$

J: オークベッセル函数, N: オークベッセル函数

$$(c) f(\xi) = (laa' + x)^2 / laa_2^2$$

$$\alpha_{aa'} = \mu_{aa'}^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} (\mu_{aa'}^{-1/2} + \mu_{aa'}^{1/2}) - \mu_{aa'}^{1/2} \frac{laa'}{laa_2} k \frac{\cos(k \ln \mu_{aa'})}{\sin(k \ln \mu_{aa'})} \right\} / D$$

$$\alpha_{aa} = \mu_{aa'}^{-1/2} \left\{ \frac{1}{2} (\mu_{aa'}^{-1/2} + \mu_{aa'}^{1/2}) - \mu_{aa'}^{1/2} \frac{laa'}{laa_2} k \frac{\cos(k \ln \mu_{aa'})}{\sin(k \ln \mu_{aa'})} \right\} / D$$

$$\beta_{aa'} = \beta_{aa} = \left(1 - \mu_{aa'}^{1/2} \frac{laa'}{laa_2} k \frac{1}{\sin(k \ln \mu_{aa'})} \right) / D$$

$$\delta_{aa'} = Z_{aa'}^2 / \mu_{aa'}^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} (\mu_{aa'}^{-1/2} + \mu_{aa'}^{1/2}) - \mu_{aa'}^{1/2} \frac{laa'}{laa_2} k \frac{\cos(k \ln \mu_{aa'})}{\sin(k \ln \mu_{aa'})} \right\}$$

$$\delta_{aa} = Z_{aa'}^2 / \mu_{aa'}^{-1/2} \left\{ \frac{1}{2} (\mu_{aa'}^{-1/2} + \mu_{aa'}^{1/2}) - \mu_{aa'}^{1/2} \frac{laa'}{laa_2} k \frac{\cos(k \ln \mu_{aa'})}{\sin(k \ln \mu_{aa'})} \right\}$$

(d) $f(\xi) = (\lambda_{aa1} + x)^3 / \lambda_{aa2}$

$$(e) \quad f(\xi) = (\lambda_{aa_1} + x)^2 / \lambda_{aa_2}$$

$$\beta_{aa'} = \beta_{a'a} = Z_{aa'} (M_{aa'} Z_{aa'} - \sin M_{aa'} Z_{aa'}) / M_{aa'} \{ 2 (1 - \cos M_{aa'} Z_{aa'}) - M_{aa'} Z_{aa'} \sin M_{aa'} Z_{aa'} \}$$

Sa' - Maa'Zaa' Rim Maa'Zaa' / (Rim Maa'Zaa' - Maa'Zaa' Cos Maa'Zaa')

式の適用に当っては、一般の骨組問題を撓角法によって解く場合と同様に考えて取扱えば良い。

○層方程式 任意層 j に於て $\sum Q = 0$, 部材角の数にだけ成立する。

$$Q_{aa'} = Q_{a'a} = -\frac{1}{f_{aa'}} (M_{aa'} + M_{a'a} + Z_{aa'}^2 k_{aa'} \psi_{aa'}) \quad (11)$$

4. 例題

Diagram illustrating the structural analysis of a continuous beam with three supports (1, 2, 3) and a vertical member at support 2. The beam segments are labeled 1-2 and 2-3. The vertical member is labeled $N = N_0$. The beam has a fixed support at 1, a roller support at 2, and a fixed support at 3. The vertical member has a fixed support at z' and a roller support at z . The diagram is labeled (图-2) at the bottom right.

Supports and Members:

- Support 1: Fixed support.
- Support 2: Roller support.
- Support 3: Fixed support.
- Member 1-2: Beam segment from support 1 to support 2.
- Member 2-3: Beam segment from support 2 to support 3.
- Member $N = N_0$: Vertical member at support 2.
- Member z' : Vertical member at support 2, fixed at z' and roller at z .

Structural Parameters and Equations:

For member 1-2:

- $k_{12} = k_1$
- $\varphi_{2,1} = \varphi_2$
- $\psi_{1,2} = 0$
- $M_{12} = 0$

For member 2-3:

- $k_{23}' = 1$
- $\varphi_{2,3}' = \varphi_2$
- $\psi_{2,3}' = 0$
- $\psi_{2,3} = 0$
- $M_{32} = 0$

For member $N = N_0$:

- $\mu_{2,1}' = \mu_0$
- $\bar{z}_{2,1}' = 1$
- $\bar{z}_{2,2}' = z_0$
- $(\bar{h}_{2,1}' = h_0)$

Diagram Label: (图-2)

$$Z_{aa'} = Z_{aa'} Z_o$$

$$Z_{aa'} = \left(\frac{N_{aa'}}{N_o} \frac{L_{aa'}}{L_o} / \frac{E_{aa'}}{E_o K_o} \right)^{1/2}$$

$$Z_s = (N_0 \cdot l_0 / E \cdot k_0)^{1/2} \quad \text{----- (13)}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda, \quad \alpha_{aa'} + \beta_{aa'} &\equiv \gamma_{aa'} \\ \beta_{da} + \alpha_{da} &\equiv \gamma_{da} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

と表わせば 成立する撓屈撓角式は

剪断力式は、 $Q_{22} = -\frac{1}{I_0} \{ (\alpha_{22} + \beta_{22}) \varphi_2 - (\gamma_{22} + \gamma_{22} - Z^2) \psi_2 \} \dots\dots\dots (16)$

$$\left. \begin{aligned} \sum M_2 = 0, \quad (3k_1 + 3k_2 + \alpha_{22})\varphi_2 - \gamma_{22}\psi_2 = 0 \\ \sum M_3 = 0, \quad (3k_1 + 3k_2 + \alpha_{33})\varphi_3 - \gamma_{33}\psi_3 = 0 \end{aligned} \right\} \text{-----} \quad (17)$$

$$Q_{22}' = 0, \quad (\alpha_{22}' + \beta_{22})\varphi_2 - (\gamma_{22}' + \gamma_{22} - Z_0^2)\psi_2 =$$

$$\begin{vmatrix} 3(k_1 + k_2) + \alpha_{22}' & \gamma_{21}' \\ \alpha_{22}' + \beta_{22}' & \gamma_{22}' + \gamma_{22}'' - Z_0'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{----- (18)}$$

(18)式を満足する様なZ₀の値を試算により求めれば $N = N_0 = Z_0^2 E K_0 / l$ ----- (19)

5. 補足

Z-(e)の場合の係数につき考察した事を次記する。

今部材 A-A'の標準断面として、焦点Oから $\sqrt{I_{ax} \cdot I_{ay}}$ なる距離にある断面を考える。
(載頭円錐材の場合には、半径 $\sqrt{I_{ax} \cdot I_{ay}}$ なる断面である。) この断面に於ける断面二次モメントを $I_{aa'}$ で表わせば、 $I_{aa'} = I_{aa} / \mu_{aa}^2$, $K_{aa'} = I_{aa} / l_{aa}$

よって各係数は次の如くなる。

$$k_{aa'} = k_{aa} / \mu_{aa}^2 , \quad k_{aa'}^0 = E K_{aa'} / E_0 K_0 \text{ ----- (20)}$$

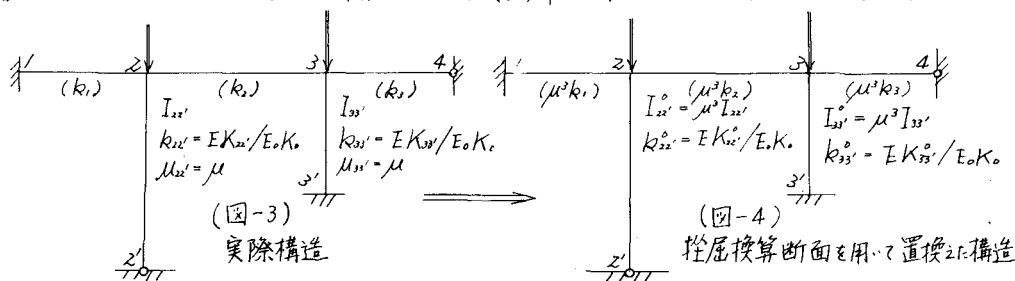
$$\alpha_{aa'} = \alpha_{aa} / \mu_{aa}^2 , \quad \alpha_{aa'}^0 = \alpha_{aa}^0 / \mu_{aa}^2 , \quad (\beta_{aa'} = \beta_{aa}) = (\beta_{aa}^0 / \mu_{aa}^2) = (\beta_{aa}^0 / \mu_{aa}^2)$$

$$\delta_{aa'} = \delta_{aa} / \mu_{aa}^2 , \quad \delta_{aa'}^0 = \delta_{aa}^0 / \mu_{aa}^2 \text{ ----- (21)}$$

但し、ここに右肩添字零は部材 A-A'が断面二次モメント I_{aa}^0 なる定断面材と考えた時の控屈撓角式係数で Z-(a)の内容をもつ。

既出問題(図-2参照)に於て、1, 3点と固定した場合を考える。この時控屈条件式は次の如くなる。 $4(k_{22} + k_{33}) + k_{22} \alpha_{22} = 0$, この式に(20),(21)式を代入すれば、 $4\mu_{22}^2(k_{22} + k_{33}) + k_{22}^0 \alpha_{22}^0 = 0$ となる。即ち、2-2部材は上記標準断面 I_{aa}^0 (これを控屈換算断面と名付ける。)の定断面材と考え、他の1-2, 2-3部材の剛比 k に $\mu^2 k$ を用いる事により、一般の定断面材骨組構造の控屈解析と同型となり既存の実用のための表やグラフを利便出来る事になる。

以上で分る様に肘型、丁型、内型、Π型等の骨組構造で柱と変断面柱 $i-i'$ とする時この柱が部材角を生ぜず、又 i' 端が固定、又は、ピン端の場合に限り、この骨組に対する控屈条件式は $\alpha_{ii'}$ 又は $\delta_{ii'}$ のみの函数となり更にこれ等の柱が凡て同じ $\mu_{ii'}$ の値を持つ時、この骨組は上述の如く一般の定断面材骨組として取扱う事が可能である。(図-3, 4参照)



- 文献 (1) 坂静雄 ; 撓角法による剛節架構の安定論 建築雑誌 1931. 11 ,
(2) 樋浦大三 ; 撓角法による構造物の安定論 土木学会誌 1940. 10, 11 ,
(3) 小西一郎 ; 一般剛節構造物の解法及びその極限状態に於ける性状について 土木学会論文集 9号 1950 .