# 弾塑性体の補足エネルギーについて

九州大学 教授 山崎徳也
〃 大学院学生 ○太田俊昭

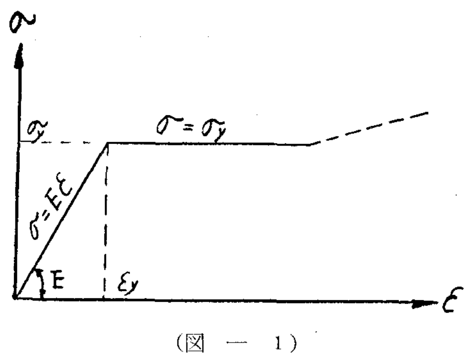
## 序言

弾性学において変分原理が成立し，エネルギー法を基盤とするカスチリアノの定理および最小仕事の原理などが導かれ，これらは応力の平衡方程式を解く正攻法とは異った武器を提供している。すなわちタワミ角式，3連および4連モーメントの定理，モーメント分配法など構造力学において欠くべからざる理論の大半が上述の変分法より導き出されることは周知の通りである。他方塑性学においてもこの変分原理[2)4)]は成立し後述の第2極小原理を用うれば，エネルギー法が弾塑性，さらには歪硬化を生じる領域においても，弾性の場合と同様に成立する。しかるに塑性領域を考慮して補足エネルギーを忠実に求める場合，断面形状によっては式型並に演算が極めて煩雑で，実用上その意義を失うと云っても過言ではない。本論文はこの欠点を排除する目的で M-$\phi$ 近似直線を導入しこれに基くエネルギー法を誘導したもので，計算手法の簡易さに加えて充分の精度が得られ Plastic Hinge Method の近似性を凌駕する精密解と認めうる。

## §1. 弾塑性体の補足エネルギー

本論文で対象とする弾塑性体とは曲げ応力が弾塑性状態にある梁および板などであり，例として短形断面の Steel 部材について考察を進める。

**1）モーメントの算定**；塑性解析に慣用の仮定は次の如くである。




（図 — 1）

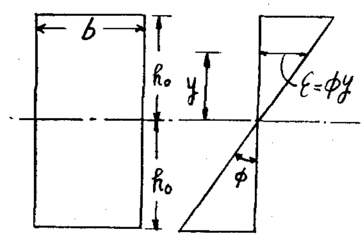
i）歪みは中立軸の距離に比例する。

ii）応力—歪み曲線は図—1の如く直線で理想化したものを考える。

iii）圧縮側の応力—歪の関係は引張側と同じとする。

以上の仮定に基き，部材が弾性曲げと弾塑性曲げとを受けている場合は次の2種の考察が必要となる。

a）弾性曲げ；図—2に示す短形断面の梁が曲率$\phi$で曲げられた時，中立軸よりyの歪$\varepsilon$は



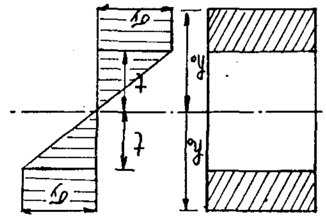

（図 — 2）

$$\varepsilon=\phi y \quad \cdots\cdots(1)$$

またモーメントは $M=\int \sigma y dA=EI\phi \quad\cdots\cdots(2)$

特に$\phi=\phi_y$なる時$M=M_y$で外縁が降伏点に達した時のモーメントを示し $\sigma_y\dfrac{I}{h_0}$ で与えられる。

b）弾塑性曲げ；応力が弾塑性状態に達した時の弾性域の深さを2tとすれば図—3より直ちに曲率$\phi$は




（図 — 3）

$$\phi=\sigma_y/Et \quad\cdots\cdots(3)$$

さらに $M=2\int_0^t \sigma_y dA+2\int_t^{h_0}\sigma_y y dA$

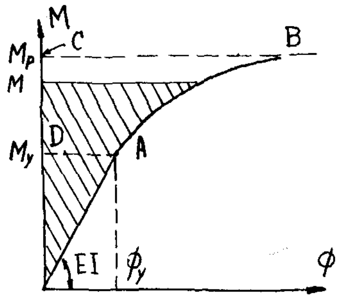
$$=M_p-\frac{\sigma_y}{3}bt^2 \quad\cdots\cdots(4)_a$$

ここに$M_p=\sigma_y Z$でいわゆる塑性モーメントである。

上式を(3)式により $\phi$ で示せば

$$M=M_p-b\sigma_y{}^3/3E^2\phi^2 \quad \cdots\cdots (4)_b$$

故に $M-\phi$ 曲線は図—4の如くなる。

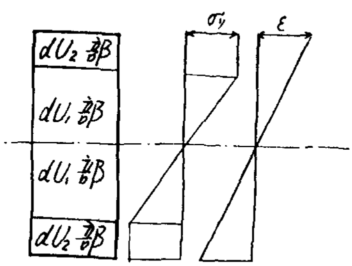



（図 — 4）

**2）補足エネルギーの算定**；補足エネルギーは断面について次式で定義されている。即ち

$$dU=ds\int\int\varepsilon d\sigma dA \quad \cdots\cdots (5)$$

図—5に示される如く，dU を $dU_1$ と $dU_2$ とに分けて考えると




（図 — 5）

$$dU_1=2ds\int_0^t\left[\int_0^{\sigma}\varepsilon d\sigma\right]dA,$$

$$dU_2=2ds\int_t^{h_0}\left[\int_0^{\sigma_y}\varepsilon d\sigma\right]dA \quad \cdots\cdots (6)$$

よって　$dU=dU_1+dU_2 \quad \cdots\cdots (7)$

(6)式を(7)式に代入し，さらに$(4)_b$式を用いてMの変数で置き換えれば結局次式を得る。

$$dU=ds\left\{\frac{1}{2EI}\left(\frac{4}{3}M_p^2-\frac{8}{3\sqrt{3}}M_p^2\sqrt{1-M/M_p}\right)\right\} \quad (8)$$

ここで図—4に示す斜線部の面積を計算すれば次の如くなる。

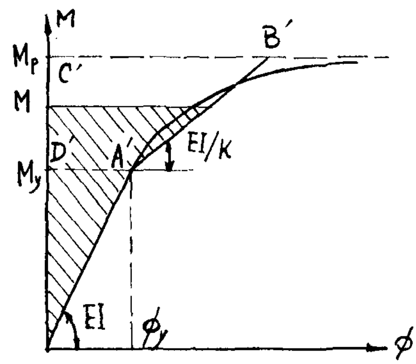
$$\int\phi dM=\int_0^{M_y}\sigma dM+\int_{M_y}^{M}\phi dM$$

$$=\frac{1}{2EI}\left(\frac{4}{3}M_p^2-\frac{8}{3\sqrt{3}}M_p^2\sqrt{1-M/M_p}\right) \quad \cdots\cdots (9)$$

これは(8)式の右辺の中括弧の中の値と全く等しいので補足エネルギーは M-$\phi$ 曲線の斜線部の面積で与えられることが判る。

## §2. M-$\phi$ 近似直線

補足エネルギーは断面形状によっては非常に複雑な形となり，最も簡単な短形断面でも(9)式の如くで，その後の取扱を可成困難にする。一般に M-$\phi$ 曲線は各種断面とも図—4と似ており，弾性域においては(2)式で，弾塑性域では曲線となり M が $M_p$ に近ずくにつれ $M=M_p$ の直線に漸近する。この曲線部を追跡することが複雑化の主要因であるのでこの近似解として図—6の如く特定の直線で置き換えた上で補足エネルギー dU を斜線部の面積で近似する。




（図 — 6）

$$dU=ds\int_0^M\phi dM$$

$$=\frac{1}{2EI}\{M^2+\kappa_0(M-M_y)^2\} \quad \cdots\cdots (10)_a$$

よって

$$U=\int_P\frac{M^2}{2EI}ds+\kappa_0\int_P\frac{(M-M_y)^2}{2EI}ds \quad \cdots\cdots (10)_b$$

ただし $\kappa_0=\kappa-1$

さらに弾性域の部分も加味すれば全部材にわたる補足エネルギーの一般式は次の如くなる。

$$U=\int_{E+P}\frac{M^2}{2EI}ds+\kappa_0\int_P\frac{(M-M_y)^2}{2EI}ds \quad (10)_c$$

ここに積分記号の添字EおよびPはそれぞれ部材の弾性領域部と弾塑性領域部を示す。

上式中に含まれる近似直線の勾配に関する factor $\kappa$は以下の如くして決定する。すなわち“M が $M_p$ に達するまでの補足エネルギー値が，M-$\phi$曲線と近似直線の場合合致すべきである。”ゆえに図—4の面積ABCDと図—6の面積A′B′C′D′が等しくなる様に $\kappa$を決める。前者の面積を $A_c$，後者のを $A_s$ とすれば

$$A_c=M_y{}^2/EI,\quad A_s=(\kappa+4)M_y{}^2/8EI$$

$$A_c=A_s;\quad M_y{}^2/EI=(\kappa+4)M_y{}^2/8EI$$

$$\therefore \kappa=4 \quad \cdots\cdots (11)$$

すなわち短形断面における M-$\phi$ 近似直線の勾配は EI/4

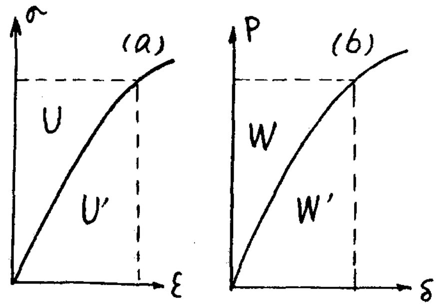
となる。この手法は円形，I形…その他の各種断面に対しても計算出来，従って任意断面形状の部材に対し(10)c式による補足エネルギーの近似式が成り立つことになり，断面形状による難易等は問題とはならず，予め $\kappa$ を算出しておけば総ての断面形状を含みうる一般性は一大特色といえ，その実用性を強調しうるものである。（他の断面に対する $\kappa$ の求め方は後日発表の予定。）

## §3. 変分原理（第2極小原理）

第2極小原理とは“系が真の平衡状態にある時，全補足ポテンシャルは応力の変化については最小である。”とある。即ち補足エネルギーおよび外力による補足仕事をそれぞれ U, W とすれば（図—$7_a$, $7_b$ 参照）

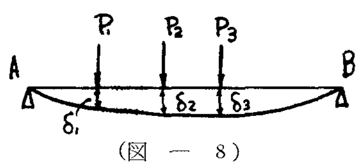
$$d(U-W)=0$$

即ち $dU=dW$ ……………………………………(12)




（図 — 7）

(12)式を梁構造に適用すれば変分法がえられる。いま理解に便ならしめるため図—8の如き単純梁について考察を行なうと，$P_1, P_2$, …の変化 $dP_1, dP_2$, …による補足エネルギーの変化は次式で与えられる。




（図 — 8）

$$dU=\frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1+\frac{\partial U}{\partial P^2}dP_2+\cdots\cdots \quad (13)$$

一方外力の仕事の変化も図—8を参照すれば直ちに

$$dW=\delta_1 dP_1+\delta_2 dP_2+\cdots\cdots \quad (14)$$

(12)式に(13)，(14)の両式を代入すれば

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P_1}-\delta_1\right)dP_1+\left(\frac{\partial U}{\partial P_2}-\delta_2\right)dP_2+\cdots=0 \quad \cdots(15)$$

$P_1, P_2$…はそれぞれ互に独立であるから

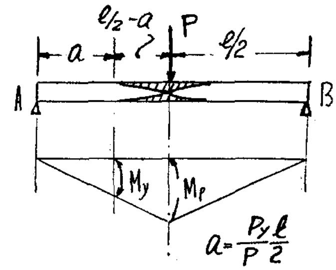
$$\frac{\partial U}{\partial P_1}=\delta_1,\ \frac{\partial U}{\partial P^2}=\delta_2,\ \cdots\cdots \quad (16)$$

勿論，変位に力が対応する如く，回転角にモーメントが対応するものである。

かくして(10)，(16)式を用うることにより，短形断面，さらには任意の断面について弾塑性領域を考慮したタワミ角式[5]や最小仕事の原理など変分法が成立可能となり，その手法は弾性の場合と全く同様である。これらの考察は歪硬化の領域まで拡張出来るが詳細は後日発表の予定である。なを塑性域を考慮した撓みの算定法には C. H. Yang の $\phi$-Area Method[1] や W. H. Weiskopf の弾性曲線に基く方法[1] などがあるが，いずれも本法に比してはるかに複雑である。

## §4. 解法および誤差の検討

単純バリ，片持バリおよび門形ラーメンなど代表的なものを選び，集中荷重に対して撓みを求め，正確に曲線をトレースした厳密解および在来の塑性設計法との比較検討を行なった。紙面の都合上単純バリ（短形断面）のみ述べれば次の如し。




（図 — 9）

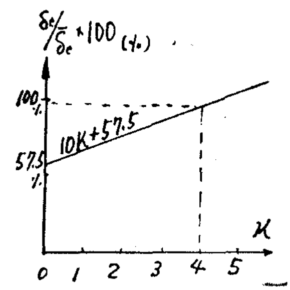
図—9の如く中央点に集中荷重が働く場合，この点のモーメントが $M_p$ に達した時の同一点の撓みは次の様に求められる。(10)c式より

$$U=2\int_0^{\ell/2}\frac{M_2}{2EI}dx+2\kappa_0\int_a^{\ell/2}\frac{(M-M_y)^2}{2EI}dx,$$

$$M=\frac{x}{a}M_y \quad \cdots\cdots \quad (17)$$

(17)式を用い変位を求めると

$$\delta_c=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{P\ell^3}{48EI}\Big[1+\kappa_0\{1-\frac{3}{2}\ (\frac{P_y}{P})\ +$$




（図 — 10）

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P_y}{P}\right)^3\}\Big]$$

$$P=P_p=\frac{3}{2}P_y \text{ なる故 } \boldsymbol{\delta}_c=\frac{P_y\ell^3}{48EI}\left(\frac{27+4\kappa_0}{18}\right)$$

厳密解による撓みは　$\bar{\boldsymbol{\delta}}_c=\frac{5}{108}\frac{P_y\ell^3}{EI}$

よって $\boldsymbol{\delta}_c/\bar{\boldsymbol{\delta}}_c\times 100$ を $\kappa$をパラメーターとしてグラフに示せば図—10の如くなり §2で得た $\kappa=4$ は97.5%に当り，誤差は2.5%で極めて精度の良いことが判る。一方これを塑性設計法で求めると，撓みは$\frac{P_y\ell^3}{32EI}$でその誤差は約32%となる。また片持梁では2.5%と48%，門形ラーメンでは約2.2%と30%の差となり，いずれも厳密解の98%にも及び，本法の正確さを示しているが，他方在来の塑性設計法は極めて誤差が大きい。

## 結　　語

本論文は梁あるいは板の弾塑性状態における応力を弾性の場合と同一手法で，エネルギー法を用いて解きうることを原理的に考察したものであるが§3で述た如くこれを基礎として塑性領域を考慮したがタワミ角式[5]や3連および4連モーメントの定理など容易に導かれ，それぞれの用途に応じてその威力を発揮するものといえる。本法の特色たる塑性域でM-$\phi$曲線を直線にて近似したために生じる誤差は部材中に占める塑性域長の部材長に対する割合に支配される。従ってモーメント荷重の如く，塑性域長が広がる場合は誤差も多少出て来るが，集中および等分布荷重においては§4の如く非常に精度が良く，従って在来用いられている塑性設計において極めて有用なる新解法となりうることを確信する。なお誤差は周知の通り $M_p/M_y=f$ の値に左右され f の小さい I 一形断面の如きは在来の塑性設計計算でも小さく，まして本法においては問題ではない。（本研究には文部省科学研究費の補助を受けた。）

## 参　考　文　献

1) K. E. Knudsen, C. H. Yang, B. G. Johnston, L. S. Beedle, W. H. Weiskopf "Plastic Strength and Deformations of Continuous Beams" Welding Journal May, 1953.

2) Hill, R. "The Mathematical Theory of Plasticity" Oxford Univ. 1950.

3) K. H. Gerstle "Deflections of Structures in The Inelastic Range" Journal of the Eng. Mech. Division, ASCE. Vol. 83, 1957.

4) 宮川松男: "クリープ変形理論と設計" 日刊工業新聞社, 1963.

5) 山崎，石川: "弾塑性領域を考慮したエネルギー法による直線材タワミ角式の誘導"，土木学会西部支部，昭和39年2月.