

弾塑性領域を考慮したエネルギー法による 直線材タワミ角式の誘導について

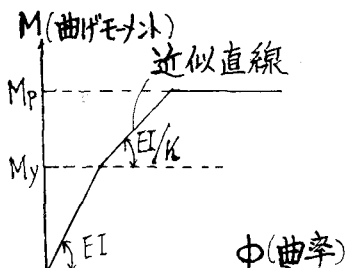
九州大学 教 授 山 崎 徳 也
" 大学院学生 ○石 川 信 隆

序 言

直線材を対象とする弾塑性領域を考慮したタワミ角式は、その内容についての批判は別として既に建築分野⁽¹⁾⁽²⁾において求められている。すなわち弾性域を越えたモーメントと曲率との関係を直線に近似して弾性曲線の微分方程式から誘導したものであるが、微分方程式の性格から誘導が複雑で、かつ一般形状部材への拡張応用は殆んど困難である。著者らは別の観点、すなわちエネルギー法⁽³⁾による誘導を試みたもので、前述の方法に比較して誘導過程の演算が容易であり、かつ材の途中に塑性領域が生ずる場合のタワミ角式も同一手法で誘導でき、また荷重項の算出も簡単であるのみならず、一般形状部材への拡張も可能である。ここでは直線材のタワミ角式の誘導について述べ解法の一端を紹介する。

§ 1. タワミ角式の誘導

曲げモーメントと曲率との関係を図の如く近似したエネルギー式の誘導考察については、文献⁽³⁾で詳細に論じてあるので、ここでは結果のみを採用する。



第 1 図

すなわち弾塑性領域を含むエネルギー式は

$$U = \int_{E+P} \frac{M^2}{2EI} ds + K_0 \int_P \frac{(M - M_y)^2}{2EI} ds \dots \dots \dots (1)$$

で表わされる。

ここに EI: 曲げ剛性

$$K_0 = K - 1$$

K: $M-\phi$ 近似直線の勾配に関する factor

M_y : 降伏点の曲げモーメント

さらに積分記号の添字 E は弾性領域の長さを、また P は、塑性領域のそれをとるものとする。

a) 両端に塑性領域が生ずる場合

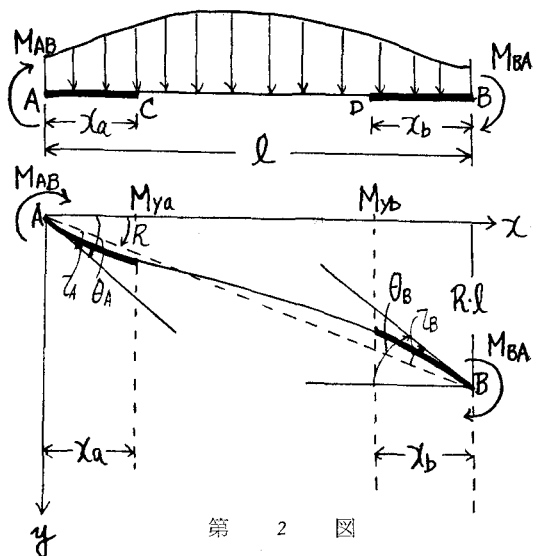
第 2 図に示す弾塑性部材 AB を考え、A, B 両端より x_a, x_b の範囲に塑性領域が生ずるものとすれば、エネルギー式は

$$U = \int_A^B \frac{M^2}{2EI} dx + K_0 \int_A^C \frac{(M - M_{ya})^2}{2EI} dx + K_0 \int_D^B \frac{(M - M_{yb})^2}{2EI} dx \dots \dots \dots (2)$$

M_{ya}, M_{yb} : C および D 点の降伏曲げモーメントとなり、AB 材が第 2 図の如く変形して釣合状態にあるものとすれば、任意点の曲げモーメントは

$$M_x = \frac{\ell - x}{\ell} M_{AB} - \frac{x}{\ell} M_{BA} + M_0 \dots \dots \dots (3)$$

で表わされる。ただし M_0 は AB 材を単純梁とみなしたときの荷重による任意点の曲げモーメントを示す。



第 2 図

変分原理を適用すれば両端 A, B における切線角 τ_A , τ_B は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\tau_A = & \int_0^\ell \frac{M}{EI} \left(-\frac{\ell-x}{\ell} \right) dx \\ & + \kappa_0 \int_0^{x_a} \frac{M-M_{ya}}{EI} \left(-\frac{\ell-x}{\ell} \right) dx \\ & + \kappa_0 \int_{\ell-x_b}^\ell \frac{M-M_{yb}}{EI} \left(-\frac{\ell-x}{\ell} \right) dx\end{aligned}$$

(3) 式を代入して

$$\left. \begin{aligned}\left(\frac{EI}{\ell} \right) \tau_A = & M_{AB} \left[\frac{1}{3} + \kappa_0 \frac{\ell^3 - (\ell-x_a)^3 + x_b^3}{3\ell^3} \right] + M_{BA} \left[-\frac{1}{6} + \kappa_0 \frac{2(x_a^3 + x_b^3) - 3\ell(x_a^2 + x_b^2)}{6\ell^3} \right] \\ & - M_{ya} \frac{2\ell x_a - x_a^2}{2\ell^2} \kappa_0 - M_{yb} \frac{x_b^2}{2\ell^2} \kappa_0 + C_1 \\ \left(\frac{EI}{\ell} \right) \tau_B = & M_{AB} \left[-\frac{1}{6} + \kappa_0 \frac{2(x_a^3 + x_b^3) - 3\ell(x_a^2 + x_b^2)}{6\ell^3} \right] + M_{BA} \left[\frac{1}{3} + \kappa_0 \frac{\ell^3 - (\ell-x_b)^3 + x_a^3}{3\ell^3} \right] \\ & + M_{ya} \frac{x_a^2}{2\ell^2} \kappa_0 + M_{yb} \frac{2\ell x_b - x_b^2}{2\ell^2} \kappa_0 - C_2\end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

ここに C_1 および C_2 は荷重によって決まる値であり、次の如き内容をもつ。

$$\begin{aligned}C_1 = & \int_0^\ell M_0 \frac{\ell-x}{\ell^2} dx + \kappa_0 \int_0^{x_a} M_0 \frac{\ell-x}{\ell^2} dx \\ & + \kappa_0 \int_{\ell-x_b}^\ell M_0 \frac{\ell-x}{\ell^2} dx \\ C_2 = & \int_0^\ell M_0 \frac{x}{\ell^2} dx + \kappa_0 \int_0^{x_a} M_0 \frac{x}{\ell^2} dx \\ & + \kappa_0 \int_{\ell-x_b}^\ell M_0 \frac{x}{\ell^2} dx\end{aligned}$$

(4)式に $\tau_A = \theta_A - R$, $\tau_B = \theta_B - R$, $K = I/\ell = kI_0/\ell_0 = kK_0$, $\varphi_A = 2EK_0\theta_A$, $\varphi_B = 2EK_0\theta_B$, $\psi_{AB} = -6EK_0R$ の置き換えを行なった後連立に解いて M_{AB} , M_{BA} を求めると所要のタワミ角式をうる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned}M_{AB} = & k_{AB}(\alpha_{AB}\varphi_A + \beta_{AB}\varphi_B + \gamma_{AB}\psi_{AB}) \\ & + \delta_a M_{ya} + \delta_b M_{yb} + C_{AB} \\ M_{BA} = & k_{AB}(\alpha_{BA}\varphi_B + \beta_{AB}\varphi_A + \gamma_{BA}\psi_{AB}) \\ & + \eta_a M_{ya} + \eta_b M_{yb} + C_{BA}\end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

ここに

$$\begin{aligned}\alpha_{AB} = & A_1/2A, \beta_{AB} = (A_2 - A_1)/2A, \gamma_{AB} = A_2/6A, \\ \alpha_{BA} = & (A_1 - A_2 + A_3)/2A, \gamma_{BA} = A_3/6A, \\ \delta_a = & \left(-\frac{x_a}{\ell} A_1 - \frac{x_a^2}{2\ell^2} A_2 \right) \kappa_0/A, \\ \delta_b = & \left(-\frac{x_b}{\ell} A_1 + \frac{x_b^2 - 2\ell x_b}{2\ell^2} A_2 \right) \kappa_0/A, \\ \eta_a = & \left\{ \frac{x_a}{\ell} (A_2 - A_1) - \frac{x_a^2}{2\ell^2} A_3 \right\} \kappa_0/A, \\ \eta_b = & \left\{ \frac{x_b}{\ell} (A_2 - A_1) + \frac{x_b^2 - 2\ell x_b}{2\ell^2} A_3 \right\} \kappa_0/A, \\ C_{AB} = & \{ C_2(A_2 - A_1) - C_1 A_1 \}/A, \\ C_{BA} = & \{ (A_1 - A_2)(C_1 + C_2) + C_2 A_3 \}/A, \\ A = & A_1(A_2 + A_3) - A_2^2 \\ A_1 = & \{ x_a^3 + \ell^3 - (\ell - x_b)^3 \} \kappa_0/3\ell^3 + 1/3 \\ A_2 = & \{ x_a^2 + \ell^2 - (\ell - x_b)^2 \} \kappa_0/2\ell^2 + 1/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_B = & \int_0^\ell \frac{M}{EI} \left(-\frac{x}{\ell} \right) dx \\ & + \kappa_a \int_0^{x_a} \frac{M-M_{ya}}{EI} \left(-\frac{x}{\ell} \right) dx \\ & + \kappa_0 \int_{\ell-x_b}^\ell \frac{M-M_{yb}}{EI} \left(-\frac{x}{\ell} \right) dx\end{aligned}$$

$$A_3 = \{ (\ell - x_b)^2 - x_a^2 + \ell^2 + 2\ell(x_a + x_b - \ell) \} \kappa_0/2\ell^2 + 1/2$$

(i) 1 端にのみ塑性領域を生ずる場合

塑性領域側を A とすれば(5)式において $x_b = 0$ とおくと $\delta_b = 0$, $\eta_0 = 0$ なり次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned}M_{AB} = & k_{AB}(\alpha_{AB}\varphi_A + \beta_{AB}\varphi_B \\ & + \gamma_{AB}\psi_{AB}) + \delta_a M_{ya} + C_{AB} \\ M_{BA} = & k_{AB}(\alpha_{BA}\varphi_B + \beta_{AB}\varphi_A \\ & + \gamma_{BA}\psi_{AB}) + \eta_a M_{ya} + C_{BA}\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

(ii) 1 端がヒンジの場合

B 端をヒンジとすれば(5)式にて $M_{BA} = 0$, $x_b = 0$ となり次式をうる。

$$M_{AB} = k_{AB}(\alpha'_{AB}\varphi_A + \gamma'_{AB}\psi_{AB}) + \delta'_a M_{ya} + H_{AB} \dots\dots(7)$$

ここに

$$\begin{aligned}\alpha'_{AB} = & 1/2B, \gamma'_{AB} = 1/6B, \delta'_a = (A_3 - \frac{1}{2})/B \\ H_{AB} = & -C'_1/B,\end{aligned}$$

$$C'_1 = \int_0^\ell M_0 \frac{\ell-x}{\ell^2} dx + \kappa_0 \int_0^{x_a} M_0 \frac{\ell-x}{\ell^2} dx$$

$$B = A_1 - A_2 - A_3, \quad A_1 = \frac{x_a^3}{3\ell^3} \kappa_0 + 1/3$$

$$A_2 = x_a^2 \kappa_0/2\ell^2 + 1/2, \quad A_3 = (2\ell x_a - x_a^2) \kappa_0/2\ell^2 + 1/2$$

(iii) 1 端に塑性ヒンジが生ずる場合

B 端に塑性ヒンジが形成された場合は(5)式で $M_{BA} = M_D$ とおけば求められる。

(iv) 塑性領域がない場合

(5)式で $x_a = 0$, $x_b = 0$, $\kappa_0 = 1$ とおけば当然次の慣用式がえられる。

$$\left. \begin{aligned}M_{AB} = & k_{AB}(2\varphi_A + \varphi_B + \psi_{AB}) + C_{AB} \\ M_{BA} = & k_{AB}(2\varphi_B + \varphi_A + \psi_{AB}) + C_{BA}\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

b) 途中にだけ塑性領域が生ずる場合 (第3図)

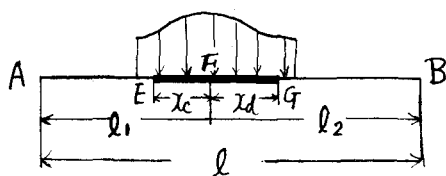
a) と同様に途中の塑性領域を入れて誘導すれば、

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= k_{AB}(\alpha_{AB}\varphi_A + \beta_{AB}\varphi_B + \gamma_{AB}\psi_{AB}) \\ &\quad + \partial_c M_{yc} + \partial_d M_{yd} + C_{AB} \\ M_{BA} &= k_{AB}(\beta_{AB}\varphi_A + \alpha_{BA}\varphi_B + \gamma_{BA}\psi_{AB}) \\ &\quad + \gamma_c M_{yc} + \gamma_d M_{yd} + C_{BA} \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

ここに

$\alpha_{AB}, \beta_{AB}, \alpha_{BA}, \gamma_{AB}, \gamma_{BA}, C_{AB}, C_{BA}$ は(5)式の場合と同じで次の係数のみ異なる。

$$\partial_c = \left\{ \frac{x_c}{\ell^2} (A_1 \ell - A_2 \ell_1) + \frac{x_c^2}{2\ell^2} A_2 \right\} \kappa_0 / A,$$



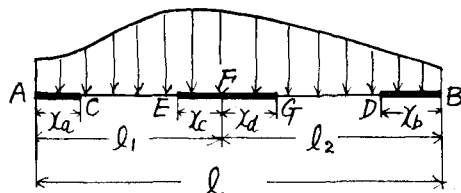
第 3 図

$$\begin{aligned} \partial_d &= \left\{ \frac{x_d}{\ell^2} (A_1 \ell - A_2 \ell_1) - \frac{x_d^2}{2\ell^2} A_2 \right\} \kappa_0 / A \\ \gamma_c &= \left\{ \frac{x_c}{\ell^2} (A_2 \ell - A_1 \ell - A_3 \ell_1) + \frac{x_c^2}{2\ell^2} A_3 \right\} \kappa_0 / A, \\ \gamma_d &= \left\{ \frac{x_d}{\ell^2} (A_2 \ell - A_1 \ell - A_3 \ell_1) - \frac{x_d^2}{2\ell^2} A_3 \right\} \kappa_0 / A \end{aligned}$$

$$A = A_1(A_2 + A_3) - A_2^2, \quad A_1 = \{ (x_c + x_d) \ell_1^2 + (x_c^2 - x_d^2) \ell_1 + (x_c^3 + x_d^3) / 3 \} \kappa_0 / \ell^3 + 1/3$$

$$A_2 = \{ (x_c + x_d) \ell_1 + (x_c^2 - x_d^2) / 2 \} \kappa_0 / \ell^2 + 1/2,$$

$$A_3 = \{ x_c + x_d \} \ell_2 - (x_c^2 - x_d^2) / 2 \} \kappa_0 / \ell^2 + 1/2$$



第 4 図

c) 両端および途中に塑性領域が生ずる場合(第4図)

誘導は同じく結果のみ記せば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= k_{AB}(\alpha_{AB}\varphi_A + \beta_{AB}\varphi_B + \gamma_{AB}\psi_{AB}) \\ &\quad + \partial_a M_{ya} + \partial_b M_{yb} + \partial_c M_{yc} + \partial_d M_{yd} + C_{AB} \\ M_{BA} &= k_{AB}(\alpha_{BA}\varphi_B + \beta_{BA}\varphi_A + \gamma_{BA}\psi_{AB}) + \partial_a M_{ya} \\ &\quad + \gamma_b M_{yb} + \gamma_c M_{yc} + \gamma_d M_{yd} + C_{BA} \end{aligned} \right\} (10)$$

ここに $\alpha_{AB}, \beta_{AB}, \alpha_{BA}, \gamma_{AB}, \gamma_{BA}, \partial_a, \partial_b, \gamma_a, \gamma_b, C_{AB}, C_{BA}, A$ は(5)式の表現に同じく、 $\partial_c, \partial_d, \gamma_c, \gamma_d$ は(9)式のそれに等しいが、内容的に異なること次の如し。

$$A_1 = \{ \ell^3 - (\ell - x_b)^3 + x_a^3 + 3(x_c + x_d) \ell^2 + 3(x_c^2 - x_d^2) \ell_1 + x_c^3 + x_d^3 \} \kappa_0 / 3\ell^3 + 1/3$$

$$A_2 = \{ \ell^2 - (\ell - x_b)^2 + x_a^2 + 2(x_c + x_d) \ell_1 + x_c^2 - x_d^2 \} \kappa_0 / 2\ell^2 + 1/2$$

$$A_3 = \{ \ell^2 + (\ell - x_b)^2 - x_a^2 + 2\ell(x_a + x_b - \ell) + 2(x_c + x_d) \ell_2 - x_c^2 + x_d^2 \} \kappa_0 / 2\ell^2 + 1/2$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \int_0^{\ell} M_0 \frac{\ell - x}{\ell^2} dx + \kappa_0 \left[\int_0^{x_a} M_0 \frac{\ell - x}{\ell^2} dx \right. \\ &\quad + \int_{\ell_1 - x_c}^{\ell_1} M_0 \frac{\ell - x}{\ell^2} dx + \int_{\ell_1 + x_d}^{\ell} M_0 \frac{\ell - x}{\ell^2} dx \\ &\quad \left. + \int_{\ell - x_b}^{\ell} M_0 \frac{\ell - x}{\ell^2} dx \right] \\ C_2 &= \int_0^{\ell} M_0 \frac{x}{\ell^2} dx + \kappa_0 \left[\int_0^{x_a} M_0 \frac{x}{\ell^2} dx \right. \\ &\quad + \int_{\ell_1 - x_c}^{\ell_1} M_0 \frac{x}{\ell^2} dx \\ &\quad \left. + \int_{\ell_1 + x_d}^{\ell} M_0 \frac{x}{\ell^2} dx + \int_{\ell - x_b}^{\ell} M_0 \frac{x}{\ell^2} dx \right] \end{aligned} \right\} (11)$$

d) 前項において途中に塑性ヒンジが生じた場合

部材の途中に塑性ヒンジが形成される場合は、第4図において AF(ℓ_1) と FB(ℓ_2) の両材に分けてそれぞれに(5)式を適用してこれを解決する手法をとる。

e) 荷 重 項

主たる荷重状態における C_1, C_2 の値を(11)式より算定すれば表—1をうる。

表 — 1

荷 重 図	C_1	C_2
	$P \left[\frac{\ell}{16} + \kappa_0 \left\{ \frac{3\ell x_a^2 - 2x_a^3 + 2x_b^3}{12\ell^2} + \frac{3\ell^2 (x_c + x_d) - 6\ell x_d^2 + 4(x_d^3 - x_c^3)}{24\ell^2} \right\} \right]$	$P \left[\frac{\ell}{16} + \kappa_0 \left\{ \frac{3\ell x_b^2 - 2x_b^3 + 2x_a^3}{12\ell^2} + \frac{3\ell^2 (x_c + x_d) - 6\ell x_c^2 + 4(x_c^3 - x_d^3)}{24\ell^2} \right\} \right]$

	$\frac{P}{6\ell^3} \left[\ell_2 \ell (\ell^2 - \ell_2^2) + \kappa_0 \{ \ell_2 (3\ell x_a^2 - 2x_a^3) + 2\ell_1 x_b^3 + 6\ell_1 \ell_2^2 (x_c + x_d) + 6\ell_1 \ell_2 (x_c^2 - x_d^2) - 3\ell \ell_2 x_c^2 + 2(\ell_1 x_d^3 - \ell_2 x_c^3) \} \right]$	$\frac{P}{6\ell^3} \left[\ell_1 \ell (\ell^2 - \ell_1^2) + \kappa_0 \{ \ell_1 (3\ell x_b^2 - 2x_b^3) + 2\ell_2 x_a^3 + 6\ell_1^2 \ell_2 (x_c + x_d) + 6\ell_1 \ell_2 (x_d^2 - x_c^2) - 3\ell \ell_1 x_d^2 + 2(\ell_2 x_c^3 - \ell_1 x_d^3) \} \right]$
	$\frac{w}{24\ell^3} \left[\ell^4 + \kappa_0 \{ 6\ell^2 x_a^2 + 4\ell (x_b^3 - 2x_a^3) + 3(x_a^4 - x_b^4) + 12\ell_1 \ell_2^2 (x_c + x_d) + 4(\ell_1 - 2\ell_2) (x_c^3 + x_d^3) \} \right]$	$\frac{w}{24\ell^3} \left[\ell^4 + \kappa_0 \{ 6x_b^2 + 4\ell (x_a^3 - 2x_b^3) + 3(x_b^4 - x_a^4) + 12\ell_2^2 \ell_1 (x_c + x_d) + 4(\ell_2 - 2\ell_1) (x_c^3 + x_d^3) \} \right]$

§ 2. タワミ角式によるラーメンの弾塑性解析法

以上のタワミ角式を用いてラーメンの弾塑性解析を行なうには、通常タワミ角法に準ずればよい。すなわち節点方程式および層方程式を用いて未知数の節点回転角 θ と部材回転角 R を決定し、さらに塑性領域範囲を示す x_a , x_b などの未知数に対しては曲げモーメントの適合条件式、例えば第2図における塑性部分の先端C点の算出曲げモーメントが、部材の降伏点曲げモーメント M_{ya} に等しかるべき条件より、

$$M_{ya} = \frac{\ell - x_a}{\ell} M_{AB} - \frac{x_a}{\ell} M_{BA} + M_0(x_a) \dots\dots\dots (12)$$

が成立し、これが領域未知数 x_a に対処するわけで、結局未知数と同数の条件式が得られることになるが、その算法は繰返し試算を必要とする。なお本研究は文部省科学研究費の補助を受けたことを附記する。

文 献

- 1) 建築学大系: 9「建築弾塑性学」12「座屈論」
- 2) 山田孝一郎: 「撓角法形式による骨組の弾塑性解析法とその応用」(建築学会論文報告集80号)。
- 3) 山崎, 太田: 「弾塑性体の補助エネルギーについて」。

(土木学会西部支部 昭和39年2月)