

中間ヒンジをもつ円弧及び拋物線材に

不完全剛結性と剛域を考慮した撓角式

九州大学工学部 助教授 山崎 徳也

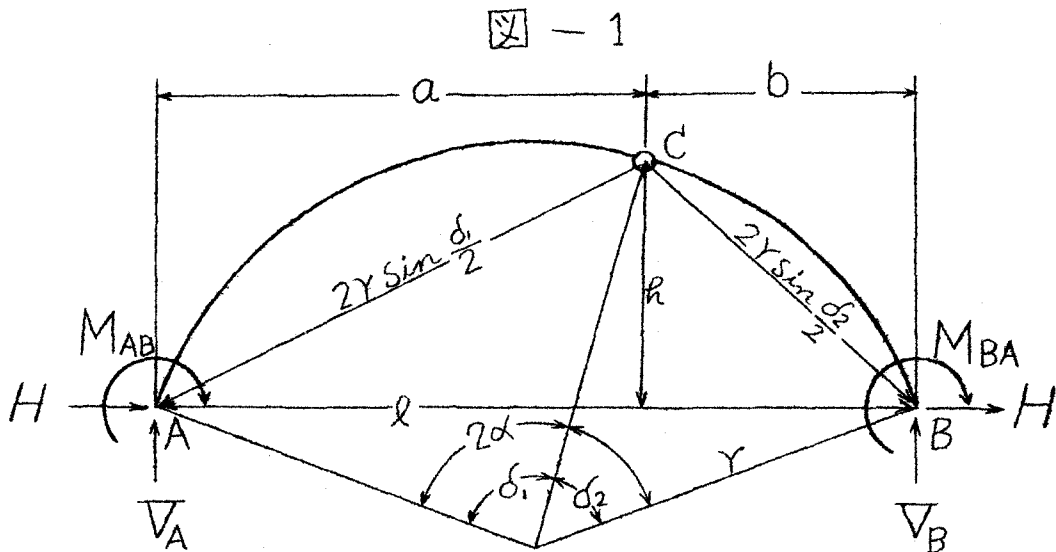
緒 言) 本研究は、両端に剛域をもち、つづいて不完全剛域をもち、つづいて不完全剛結点の存在する円弧及び拋物線部材を考え、かかる部材の途中にヒンジを有するラーメン材の材端モーメントに対する撓角式を誘導し、このような材を含むラーメンの解法、ならびに、剛域と不完全剛結法をもつ円弧及び拋物線ラーメンにおいて材内の一点の連続性が失われた場合の応力状態の変化の研究および極限設計法の応用などに対する基本式を得ることを目的としている。

円弧部材の EI は一定とし、拋物線の I は x の 1 次および 2 次式として変化させた。従つて両者の違いは式中の係数内容であり、ここでは円弧材について理論式を誘導する。

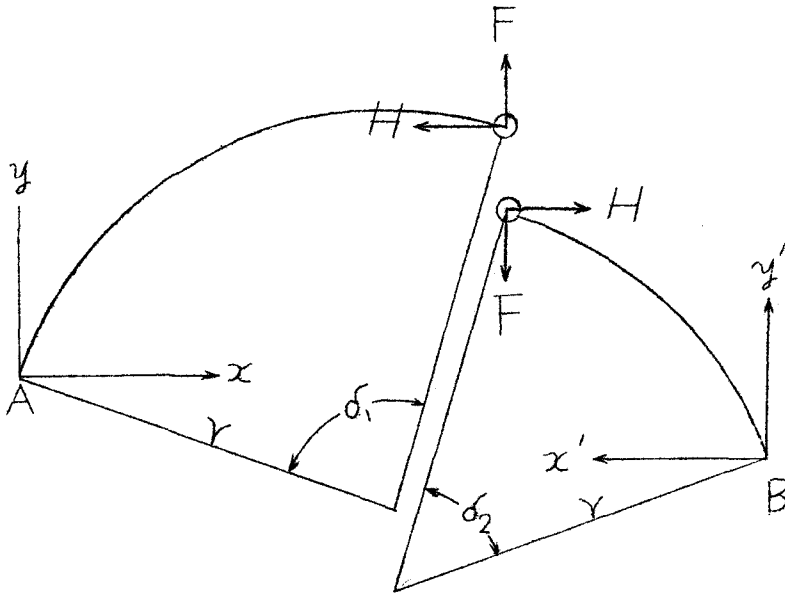
1) 中間ヒンジをもつ完全剛結円弧材の撓角式

ヒンジ点の左側任意点の曲げモーメント M は次のごとく表わされる。

$$M = F (a - x) + H (h - y)$$



図—2



Mによる仕事 W_1 は

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_A^C \frac{M^2}{EI} ds$$

従つてO点の撓み δ_C は

$$\delta_C = \frac{\partial W_1}{\partial F} = \frac{1}{EI} (FK_1 + HK_2)$$

$$\text{ただし } K_1 = \int_A^C (a-x)^2 ds$$

$$= \frac{r^3}{2} \delta_1 \{ 2 - \cos 2(\delta_1 - \alpha) \} + \frac{r^3}{4} \{ 4 \sin 2(\delta_1 - \alpha) - 8 \sin(\delta_1 - \alpha) \cos \alpha - \sin 2\alpha \}$$

$$K_2 = \int_A^C (a-x)(h-y) ds$$

$$= r^3 \left\{ \frac{\delta_1}{2} \sin 2(\delta_2 - \alpha) + \frac{1}{4} \{ 3 \cos 2(\delta_2 - \alpha) - 4 \cos(\delta_1 - 2\alpha) - \cos 2\alpha \} \right\}$$

さらにヒンジ点の右側任意点の曲げモーメント M は

$$M = -F(l-x') + H(h-y')$$

○点の撓み δ_c' を求めると

$$\delta_c' = \frac{\partial W_2}{\partial F} = \frac{1}{EI} (FK_1' - HK_2')$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } K_1' &= \int_B^C (l-x')^2 ds \\ &= \frac{r^3}{2} \delta_2 \{2 - \cos 2(\delta_2 - \alpha)\} + \frac{r^3}{4} \{4 \sin 2(\delta_2 - \alpha) \\ &\quad - 8 \sin(\delta_2 - \alpha) \cos \alpha - \sin 2\alpha\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2' &= \int_B^C (l-x')(h-y') ds \\ &= r^3 \left\{ \frac{\delta_2}{2} \sin 2(\delta_2 - \alpha) + \frac{1}{4} \{3 \cos 2(\delta_2 - \alpha) - 4 \cos \right. \\ &\quad \left. (\delta_2 - \alpha) - \cos 2\alpha \} \right\} \end{aligned}$$

今 A 点の撓み角を θ_A とすると、ヒンジ点より左の部材を一端固定・一端自由の円弧材としたときの○点の撓み δ_c'' は

$$\delta_c'' = (2r \sin \frac{\delta_1}{2}) \theta_A \quad \text{でえられ (図-1 参照)}$$

$$\delta_c + \delta_c' = \delta_c'' \quad \text{とおき、かつヒンジ点○の曲げモーメントは0なること}$$

よりえられる $H = \frac{l M_{AB} - a M_{BA}}{l(l-a)}$ を代入すれば次式をうる。

$$F = \frac{EI}{K_1 + K_1'} (2r \sin \frac{\delta_1}{2}) \theta_A - \frac{K_2 - K_2'}{K_1 + K_1'} \frac{l M_{AB} - a M_{BA}}{l(l-a)}$$

この F と H を $M_{AB} = F \cdot a + H \cdot l$, $M_{BA} = F \cdot b - H \cdot l$ に代入し

$$\begin{aligned} \frac{K_2 - K_2'}{K_1 + K_1'} &= A \quad \text{とおけば} \\ \left(1 + \frac{abA}{l(l-a)} - \frac{l}{b-a} \right) M_{AB} + \left(\frac{a}{l-a} - \frac{a^2 A}{l(l-a)} \right) M_{BA} &= \frac{EIa}{K_1 + K_1'} (2r \sin \frac{\delta_1}{2}) \theta_A \\ \left(\frac{l}{b-a} + \frac{l^2 A}{l(l-a)} \right) M_{AB} + \left(1 - \frac{a}{b-a} - \frac{alA}{l(l-a)} \right) M_{BA} &= \frac{EIb}{K_1 + K_1'} (2r \sin \frac{\delta_1}{2}) \theta_A \end{aligned}$$

連立にといて

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{EIa}{K_1 + K_1'} (2Y \sin \frac{\delta_1}{2}) \theta_A \\ M_{BA} &= \frac{EIb}{K_1 + K_1'} (2Y \sin \frac{\delta_1}{2}) \theta_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

同様にB点に撓み角 θ_B を与えた場合は次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{EIa}{K_1 + K_1'} (2Y \sin \frac{\delta_2}{2}) \theta_B \\ M_{BA} &= \frac{EIb}{K_1 + K_1'} (2Y \sin \frac{\delta_2}{2}) \theta_B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

次に部材回転角Rを部材に与えた場合は

$$\frac{1}{EI} (FK_1 + HK_2) + \frac{1}{EI} (FK_1' - HK_2') = Rl$$

$$\therefore F = \frac{1}{K_1 + K_1'} \{ EIRl - H(K_2 - K_2') \}$$

$M_{AB} = -F \cdot a - H \cdot h$, $M_{BA} = -F \cdot b + H \cdot h$ に F, H を代入して連立にとけば

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= -\frac{EIa}{K_1 + K_1'} lR \\ M_{BA} &= -\frac{EIb}{K_1 + K_1'} lR \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{今 } \frac{I}{l} = K, \quad 2Y \sin \frac{\delta_1}{2} = C_1, \quad 2Y \sin \frac{\delta_2}{2} = C_2 \text{ とおき}$$

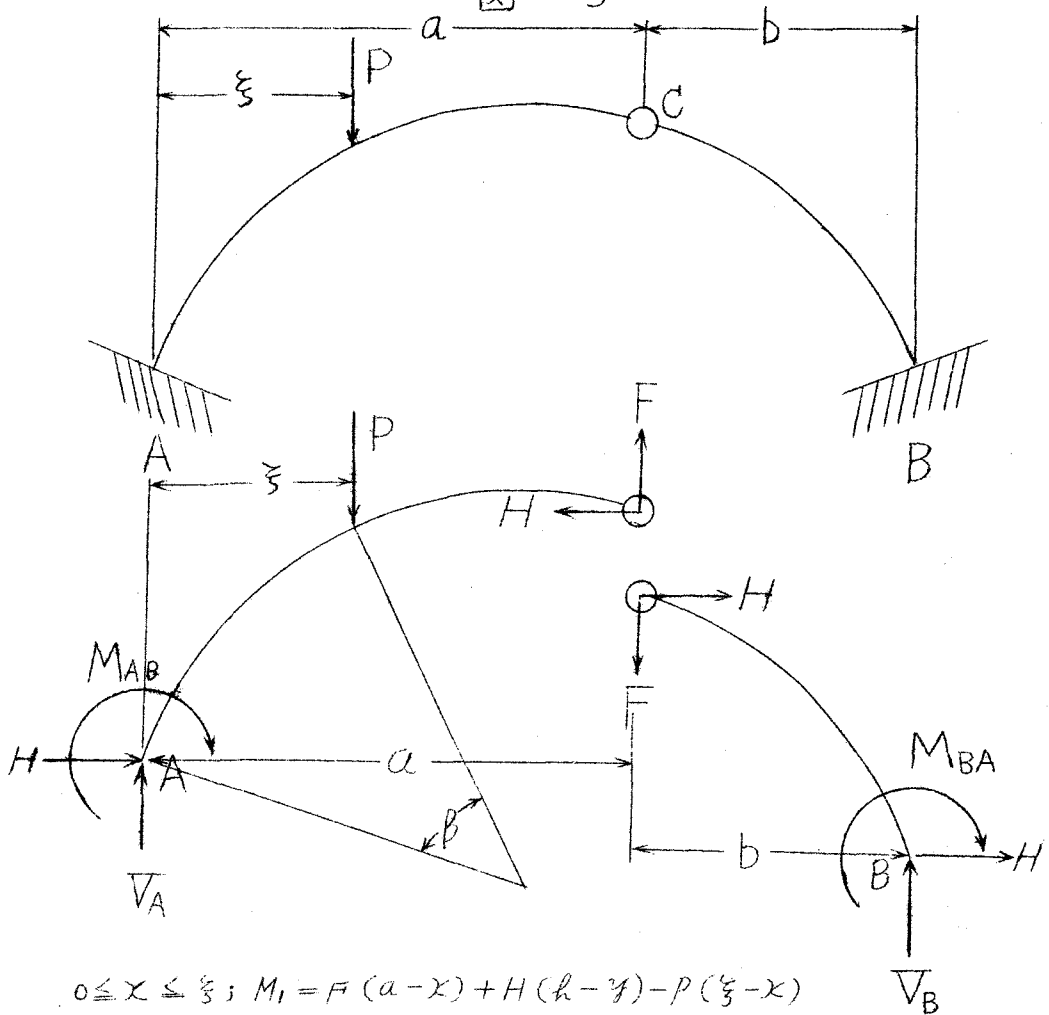
C_{AB}, C_{BA} を荷重項とすれば、求められる撓角式は(1)(2)(3)式の和として次のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2EKa (\bar{C}_1 \theta_A + \bar{C}_2 \theta_B - GR) - C_{AB} \\ M_{BA} &= 2EKb (\bar{C}_1 \theta_A + \bar{C}_2 \theta_B - GR) + C_{BA} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{ただし } \bar{C}_1 = \frac{lC_1}{2(K_1 + K_1')}, \quad \bar{C}_2 = \frac{lC_2}{2(K_1 + K_1')}, \quad G = \frac{l^2}{2(K_1 + K_1')}$$

C_{AB}, C_{BA} は中間ヒンジをもつ両端固定円弧梁の端モーメントであり、集中荷重Pが任意点に働く場合を例として次に求めてみる (図-3参照) ヒンジ点より左側についての曲げモーメントは次の如くなる。

例 3



$$0 \leq x \leq \xi; M_1 = F(a-x) + H(h-y) - P(\xi-x)$$

$$\xi \leq x \leq a; M_2 = F(a-x) + H(h-y)$$

曲げモーメントによる仕事 W は

$$W = \frac{1}{2EI} \left[\int_A^\xi M_1^2 ds + \int_\xi^C M_2^2 ds \right]$$

従つて前出の K_1 K_2 のほかに K_3 に $K_3 = \int_A^\xi (a-x)(\xi-x) ds$ とおけば

$$S_C = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{EI} (FK_1 + HK_2 - PK_3)$$

次にヒンジ点の右側を考えて

$$M = -F(l - x') + H(h - y') \quad \text{を用いて同じくC点の撓みは}$$

$$\delta_c' = \frac{1}{EI} (FK_1' - HK_2')$$

両者は等しく方向反対なるゆえ、 $\delta_c = -\delta_c'$ より

$$F = -\frac{K_2 - K_2'}{K_1 + K_1'} H + \frac{K_3}{K_1 + K_1'} P$$

しかるに

$$\left. \begin{aligned} V_A a + M_{AB} - Hh - P(a - \xi) &= 0 \\ -V_B b + M_{BA} - Hh &= 0 \\ V_A + V_B &= P \end{aligned} \right\} \text{より}$$

$$H = \frac{b M_{AB} - a M_{BA}}{h(b - a)} + \frac{b \xi}{h(b - a)} P$$

$$\left. \begin{aligned} C_{AB} = M_{AB} &= F \cdot a + Hh - P\xi \\ C_{BA} = M_{BA} &= F \cdot h \end{aligned} \right\}$$

にF、Hを代入して連立にとけば

$$\left. \begin{aligned} C_{AB} &= \left(\frac{K_3}{K_1 + K_1'} a - \xi \right) P \\ C_{BA} &= \frac{K_3}{K_1 + K_1'} b \cdot P \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } K_3 &= \frac{r^3}{4} \left[2\beta + 4\beta \sin(S_1 - \alpha) \sin(\beta - \alpha) + \sin 2(\beta - \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \sin 2\alpha + 4 \sin(S_1 - \alpha) \cos(\beta - \alpha) - 4 \cos \alpha \sin(S_1 - \alpha) \right. \\ &\quad \left. - 4 \sin(\beta - \alpha) \cos \alpha \right] \end{aligned}$$

任意巾の垂直、水平分布荷重、任意点にMの働く場合等も同様にして求められる。

- 2) 中間ヒンジをもつ不完全剛結円弧材の撓角式両端に不完全剛結性を導入する。いまこれによる口の開きは、その点に作用するモーメントに比例するとするから、A、B両点の結合部の比例常数を τ_A 、 τ_B とすれば

$$\theta_A = \Theta_A - \gamma_A M_{AB} \quad , \quad \theta_B = \Theta_B - \gamma_B M_{BA}$$

を(4)式の θ_A 、 θ_B に代入すれば足りる。

すなわち

$$M_{AB} = 2EKa \{ \bar{c}_1 (\Theta_A - \gamma_A M_{AB}) + \bar{c}_2 (\Theta_B - \gamma_B M_{BA}) - GR \} - C_{AB}$$

$$M_{BA} = 2EKl \{ \bar{c}_1 (\Theta_A - \gamma_A M_{AB}) + \bar{c}_2 (\Theta_B - \gamma_B M_{BA}) - GR \} + C_{BA}$$

(H)_A、(H)_B をあらためて θ_A 、 θ_B とかき、更に $2EK\gamma_A = \alpha$ 、 $2EK\gamma_B = \beta$ とおき、上式を連立に与ければ目的とする撓角式が得られる。

すなわち

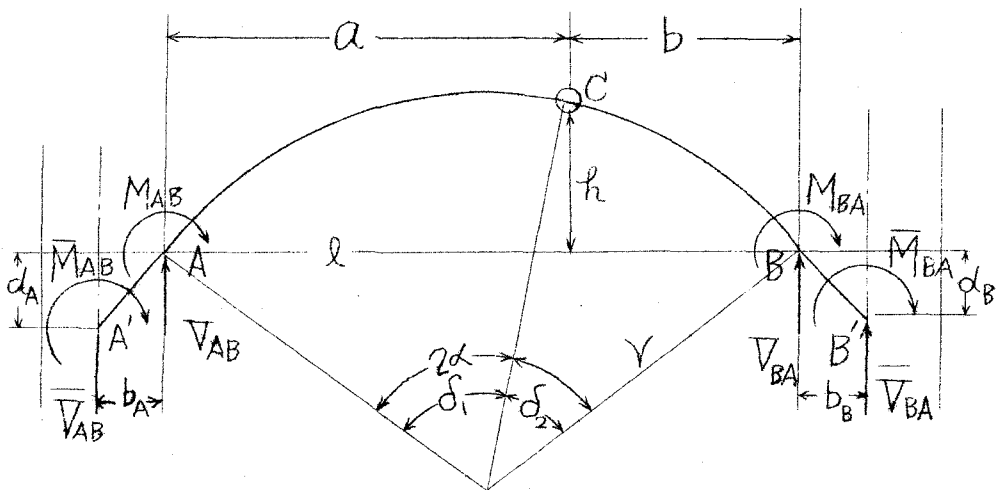
$$M_{AB} = \frac{1}{1 + a\bar{c}_1\alpha + l\bar{c}_2\beta} \{ 2EKa(\bar{c}_1\theta_A + \bar{c}_2\theta_B - GR) - (1 + l\bar{c}_2\beta)C_{AB} - a\bar{c}_2\beta C_{BA} \}$$

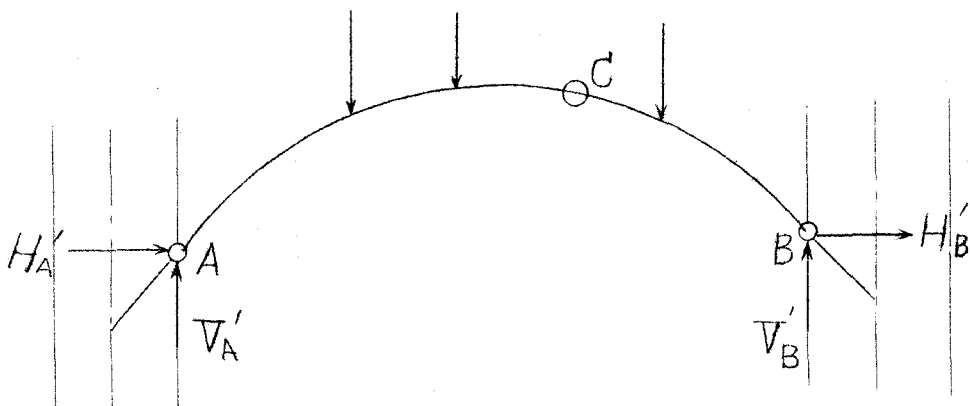
$$M_{BA} = \frac{1}{1 + a\bar{c}_1\alpha + l\bar{c}_2\beta} \{ 2EKl(\bar{c}_1\theta_A + \bar{c}_2\theta_B - GR) + l\bar{c}_1\alpha C_{AB} + (1 + a\bar{c}_1\alpha)C_{BA} \}$$

(6)式で $\alpha = \beta = 0$ とおけば、剛結に帰せられ(4)式と合致し、不完全剛結性を含んだ拡張式であることが認められる。

3) 中間ヒンジをもつ不完全剛結円弧材に剛域を考慮した撓角式

図 — 4





いま剛域を便宜上柱の巾 (b_A, d_A), (b_B, d_B) としてあらわす。A、B 点のモーメントを $\bar{M}_{AB}$, $\bar{M}_{BA}$ とし、結合点 A、B のモーメントを M_{AB} , M_{BA} とすれば (図-4 参照)

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \bar{M}_{AB} - F \cdot l_A - H \cdot d_A \\ M_{BA} &= \bar{M}_{BA} - F \cdot l_B + H \cdot d_B \end{aligned} \right\} \text{--- (7)}$$

$$F = -A \cdot \frac{l M_{AB} - a M_{BA}}{l(l-a)}, \quad H = \frac{l M_{AB} - a M_{BA}}{l(l-a)}$$

を代入して連立をとけば

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= P \cdot \bar{M}_{AB} + Q \cdot \bar{M}_{BA} \\ M_{BA} &= R \cdot \bar{M}_{AB} + S \cdot \bar{M}_{BA} \end{aligned} \right\} \text{--- (8)}$$

ただし

$$P = \frac{l(l-a) + a(l_B A + d_B)}{l(l-a) + (a l_B - l l_A) A + l d_A + a d_B}, \quad Q = \frac{a(d_A - l_A A)}{l(l-a) + (a l_B - l l_A) A + l d_A + a d_B}$$

$$R = \frac{l(l_B A + d_B)}{l(l-a) + (a l_B - l l_A) A + l d_A + a d_B}, \quad S = \frac{l(l-a) - l(l_B A + d_B)}{l(l-a) + (a l_B - l l_A) A + l d_A + a d_B}$$

この M_{AB} , M_{BA} を対象として不完全剛結性を導入し、再び連立に於いて所期の $\bar{M}_{AB}$, $\bar{M}_{BA}$ をうる。

すなわち

$$\bar{M}_{AB} = \frac{1}{(ps - qr)(1 + a\bar{c}_1\alpha + b\bar{c}_2\beta)} \left[2EK(\alpha s - \ell q)(\bar{c}_1\theta_A + \bar{c}_2\theta_B - GR) \right. \\ \left. - (s + b\bar{c}_1\alpha q + \ell\bar{c}_2\beta s)C_{AB} - (q + a\bar{c}_1\alpha q \right. \\ \left. + a\bar{c}_2\alpha\beta s)C_{BA} \right] - V'_{AB} \cdot b_A + H'_A \cdot d_A$$

$$\bar{M}_{BA} = \frac{1}{(ps - qr)(1 + a\bar{c}_1\alpha + b\bar{c}_2\beta)} \left\{ \begin{aligned} & 2EK(\ell p - ar)(\bar{c}_1\theta_A + \bar{c}_2\theta_B - GR) \\ & + (r + \ell\bar{c}_1\alpha p + \ell\bar{c}_2\beta r)C_{AB} + (p + a\bar{c}_1\alpha p \\ & + a\bar{c}_2\beta r)C_{BA} \end{aligned} \right\} + V'_{BA} \cdot b_B + H'_B \cdot d_B \quad (9)$$

V'_{AB} 、 V'_{BA} 、 H'_A 、 H'_B はそれぞれスパン ℓ なる 3 ヒンジ円弧梁における鉛直及び水平反力で、荷重により直ちに決定する既知量である。(図-4 参照)

剛域を考えないときは b_A 、 b_B 、 d_A 、 d_B は共に 0 であり、 $p = s = 1$ 、 $q = r = 0$ となり (6) 式に帰せられ剛域と不完全剛性を考慮に入れた拡張式であることが認められる。

なお (9) 式の誘導にあたり、剛域がそれぞれ θ_A 、 θ_B だけ回転するための影響を微小項として一応無視したが、これを取り入れた厳密解の誘導も行つたことを附言する。

4) 解 法

両端剛結の円弧及び拋物線部材をもつラーメンの解法と全く同様にとりあつかつて良く、節点方程式、層方程式、スパン方程式さらに足りなければ角方程式を補なつて撓角法による解法の万能性はそのままうけつがれる。

従つて撓角法に源泉するモーメント分配法、撓角分配法の適用も可能であり使用係数の内容の相違だけとなる。

結 び)

鋼構造たとコンクリート構造たとを問わず、剛域と不完全剛結点の存在を認めざるをえない場合が多い。両者とも存在する場合にも又いづれか一方のみが存在する場合

にも役立てるためには、本研究の標題事項の設定が必要となり、著者が別に誘導した「剛域をもつ不完全剛結円弧及び拋物線材の撓角式」⁽¹⁾との併用において、今日まで全然未解決の分野の研究が可能となり、各要素の影響の吟味、ひいては、それらの成果を利用しての経済設計法等々無数の問題が提示され解決されうることになった。

尚すべての上式において、円弧の半径を固定し中心角を0に極限化させることにより、 K_1 、 K'_1 、 K_2 、 K'_2 、および荷重項はいづれも簡単な値となり、それらを用いればそれぞれ1) 2) 3) の場合の直線材の撓角式がえられ、これら直線材を対象としてでも⁽²⁾⁽³⁾在来の研究⁽²⁾⁽³⁾を拡張包含するものである。

緒言にのべたごとく、拋物線部材についても同様に撓角式を誘導したが、 K_1 、 K'_1 、 K_2 、 K'_2 および荷重項の内容数値が円弧の場合と異なるのみで、力学的機構は全く同一である。この場合も I の変化率を0とし又さらに拱矢を0とすれば同じく慣用拋物線材と均一直線材にすべて帰せられる。

最後にまた折線材を対象として本研究を行うことも、全く同様であることを付け加える。

終りに御協力いただいた本山茂男、浅田忠則、小山峻君に謝意を表する。

参考文献

(1) 昭和36年度土木学会年次講演会にて発表予定(於 名古屋)

(2) 二見秀雄「材の途中にピン接合点を有するラーメン材の算式とその応用」

建築学会論文集第17号、昭和15年

(3) 吉村虎蔵「剛域をもつ弾塑性ラーメンの一解法」

熊本大学工学部研究報告第2巻1号、昭和28年