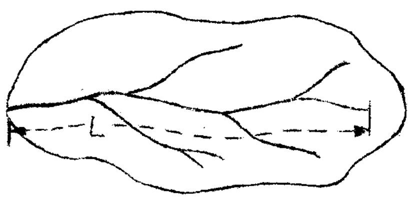
到達時間を同じにする河川勾配について

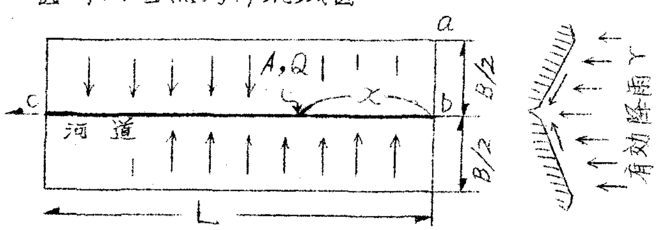
九州大学工学部　助教授　○上　田　年比古
〃　　　　　　　　　　　中　野　　昭

1．まえがき

特性曲線による出水解析では[1),2)]、図－1のように、流域を、両側に斜面をもち、中央に河道をもつ矩形流域に近似させて、雨量に対する下流端の流量算定を行うが、このとき斜面勾配及び河道勾配は計算の複雑化を防ぐため、上下流を通じて一定勾配にとる。この一定勾配は流出現象を等価ならしめる勾配をとるべきである。



図－1(a) 自然河川流域図



図－1(b) 矩形模型流域図

本報は流出現象を代表する値は到達時間であるとして、到達時間を同じにする勾配を以て等価勾配とし、実際の縦断面図から、この勾配を決定する基準について考察したものである。ここでは斜面も河道も勾配の取扱いについては同様であるので、図－1の河道ｂｃ間の勾配について考察する。

2．到達時間算定の基本式[3)]

時刻ｔにおいて、河道上流端からの距離xにおける流積をＡ、流量をＱ、両側斜面から河道への流入量をqとし、流れが等流に近く、manning 式に従うものと仮定し、河道の勾配をi、粗度係数をn、径深をＲとすれば、

連続方程式 $\partial A / \partial t + \partial Q / \partial x = q$ ....(1)

運動方程式 $Q = \frac{\sqrt{i}}{n} A R^{2/3} = \frac{\sqrt{i}}{n} k A^{p} = K A^{p}$ ......(2)

(2)式の k、p は河道断面形に関する定数で n とともに上下流を通じて一定とする。勾配 i は x の関数とする。運動方程式は不定流に対するものであるべきであるが、普通河川の流れでは摩擦項が大きく、これが重力と釣合うとして、Manning 式を用いても等価勾配の考察には十分と考える。

(1)、(2) 式に次の無次元化を行う。

$$\left.\begin{array}{l} t / T_r = \tau,\quad x / L = \lambda,\quad q / q_0 = \varphi,\quad Q / Q_* = \psi,\quad A / A_* = \zeta \\ i / i_0 = s \end{array}\right\} \cdots (3)$$

また $K = \frac{\sqrt{i}}{n} k = \frac{\sqrt{i_0}\sqrt{s}}{n} k = K_0 \sqrt{s}$ (ただし $K_0 = \frac{\sqrt{i_0}}{n} k$) ....(4)

ここに L は河道長、T_r は河道勾配が標準勾配 i_0 で、斜面からの標準流入量 q_0 が続く場合、河道上流端の雨水の影響が下流端に達する時間、すなわち到達時間であり、Q_* はこのときの下流端流量、A_* は同じく流積である。以上のように定義すれば

$Q_* = q_0 L$、 $A_* = \left(\frac{Q_*}{K_0}\right)^{1/p} = (q_0 L / K_0)^{1/p} = q_0 T_r$ .... (5)

以上の各式を (1)、(2) に代入すれば、

$$\begin{cases} \partial\zeta / \partial\tau + \partial\psi / \partial\lambda = \varphi & \cdots\cdots\cdots (6) \\ \psi = \sqrt{s}\, \zeta^{p} & \cdots\cdots\cdots (7) \end{cases}$$

(9) 式を (8) 式に入れると、

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\tau} + p\sqrt{s}\,\zeta^{p-1} \frac{\partial\zeta}{\partial\lambda} = \varphi - \frac{\zeta^{p}}{2\sqrt{s}} \frac{ds}{d\lambda} \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

これを特性曲線表示すると、

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = p\sqrt{s}\,\zeta^{p-1} \quad \text{上にて、} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \varphi - \frac{\zeta^{p}}{2\sqrt{s}} \frac{ds}{d\lambda} \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

いま勾配 s を一定、すなわち、$ds / d\lambda = 0$ とすれば、(10) 式より $\zeta = \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi d\tau + \zeta_1$ (ただし $\tau = \tau_1$ にて $\zeta = \zeta_1$) .... (11)

(9)式より　$\lambda = p\sqrt{\delta}\int_{\tau_1}^{\tau}\left(\int_{\tau_1}^{\tau}\varphi\, d\tau + \zeta_1\right)^{p-1} d\tau + \lambda_1$　………… (12)

(ただし $\tau = \tau_1$ にて $\lambda = \lambda_1$)

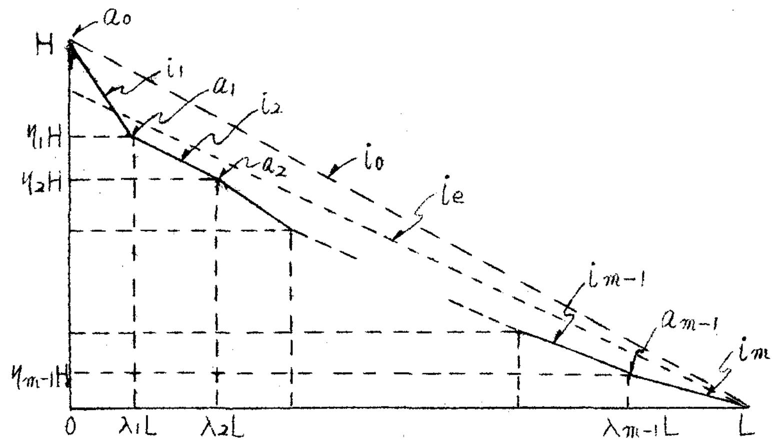
この式で下流端条件 $\lambda = 1$ を入れて、τ を求めれば、これが到達時間 τ_L である。

さらに $\varphi = \mathrm{const}$ とし、$\tau = 0$ で $\lambda = 0$、$\zeta = 0$　とすれば、

$$\lambda = \sqrt{\delta}\ \varphi^{p-1}\ \tau^{p}$$

$$\therefore\ \tau = (\lambda/\sqrt{\delta}\ \varphi^{p-1})^{1/p} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

$\lambda = 1$ として、$\tau_L = \delta^{-\frac{1}{2p}}\ \varphi^{\frac{1}{p}-1}$　………… (14)



図－2　折線よりなる縦断図

3．縦断図が折線よりなる場合の等価勾配

図－2の場合の弄価勾配を求めてみる。　高さの無次元数 $\eta = h/H$ （Hは下流端と上流端の標高差、h は任意点の標高差とする）とし、

$$i_0 = H/L \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

とすれば、

$$\left.\begin{aligned}
\delta_1 &= i_1/i_0 = \{(1-\eta_1)H/\lambda_1 L\}/i_0 = (1-\eta_1)/\lambda_1 \\
\delta_2 &= i_2/i_0 = \{(\eta_1-\eta_2)H/(\lambda_2-\lambda_1)L\}/i_0 = (\eta_1-\eta_2)/ \\
&\qquad (\lambda_2-\lambda_1) \\
\delta_m &= i_m/i_0 = \eta_{m-1}/(1-\lambda_{m-1})
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

斜面からの流入量 φ を一定として、φ を集めつつ、上流端の影響が a_1、a_2、…… に順次到達する時間を求める。まず a_0 より a_1 に到達する時間 τ_1 は、(13)式で $\lambda = \lambda_1$

とすれば
$$\tau_1 = (\lambda_1 / \sqrt{\delta_1}\ \varphi^{p-1})^{1/p}$$

次に a_0 より a_2 に到達する時間 τ_2 は、(11)式において、 $\tau = \tau_1$ で $\zeta = \zeta_1 = \varphi\tau_1$ $\lambda = \lambda_1$ なる故

$$\zeta = \varphi \cdot \tau$$

(12)式より $$\lambda = p\sqrt{\delta}\ \varphi^{p-1}\ \frac{\tau^p - \tau_1^{\,p}}{p} + \lambda_1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$\lambda = \lambda_2$ とすれば、 $$\tau_2 = [\{(\lambda_2 - \lambda_1)/\sqrt{\delta_2}\ \varphi^{p-1}\} + \tau_1^{\,p}]^{1/p} =$$
$$\{(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{1}{\sqrt{\delta_2}} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\delta_1}}\}^{\frac{1}{p}}\ \varphi^{\frac{1}{p}-1} \quad \cdots\cdots (18)$$

同様にして

$$\tau_3 = [\{(\lambda_3 - \lambda_2)/\sqrt{\delta_3}\ \varphi^{p-1}\} + \tau_2^{\,p}]^{\frac{1}{p}} = \{(\lambda_3 - \lambda_2)\frac{1}{\sqrt{\delta_3}} +$$
$$(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{1}{\sqrt{\delta_2}} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\delta_1}}\}^{\frac{1}{p}}\ \varphi^{\frac{1}{p}-1}$$

$$\tau_L = \{(1 - \lambda_{m-1})\frac{1}{\sqrt{\delta_m}\ \varphi^{p-1}} + \tau_{m-1}^{\,p}\}^{\frac{1}{p}} = \{(1 - \lambda_{m-1})\frac{1}{\sqrt{\delta_m}} + \cdots\cdots$$
$$+ (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{1}{\sqrt{\delta_2}} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\delta_1}}\}^{\frac{1}{p}}\ \varphi^{\frac{1}{p}-1} \quad \cdots\cdots (19)$$

等価勾配を δ_e とすれば、到達時間 τ_L は(14) 式より

$$\tau_L = \delta_e^{-\frac{1}{2p}}\ \varphi^{\frac{1}{p}-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

したがつて、(21) と (22) 式を等しいとおいて δ_e を求めると、

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_e}} = (1 - \lambda_{m-1})\frac{1}{\sqrt{\delta_m}} + (\lambda_{m-1} - \lambda_{m-2})\frac{1}{\sqrt{\delta_{m-1}}} + \cdots\cdots$$
$$+ (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{1}{\sqrt{\delta_2}} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\delta_1}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

すなわち等価勾配の平方根の逆数は、各々の勾配の平方根の逆数を、その勾配区間の距離の weight をつけて平均したものである。したがつて等価勾配は急勾配より緩勾配区間が大きく影響する。

次に等勾配区間を無限小にしてゆき、(21)式を積分形にすれば、勾配δがλの関数である場合の等価勾配は、近似的に

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_e}} = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{\delta}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (22)$$

で表わされる。

4. 上下流端を結ぶ勾配と縦断図の面積を等しくするように引いた勾配との比較。

自然の河川勾配は、一般に下流に向い漸次緩勾配になるのが普通である。この場合、一定勾配をとるとすれば、普通、上下流端を結んでえられる勾配と、下流端から縦断図面積を等しくするように引いた直線の勾配が考えられる。

この両者と等価勾配との関係を考察してみる。

(1) 縦断図が指数関数をなす場合。

自然河川の縦断図は普通図－3のような指数関数に似た曲線をなしている。

いまこの縦断面を指数関数

$$h = h_n e^{-\beta x/L} \qquad \cdots\cdots \quad (23)$$

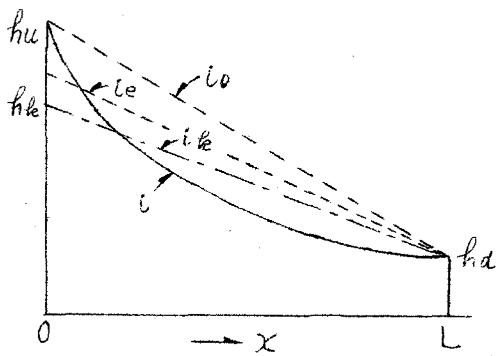
であるとする。

$x = L$にて、$h = h_d$ なる故、

$$e^{-\beta} = h_d / h_n \quad \text{or} \quad \beta = \log \frac{h_n}{h_d} \qquad \cdots\cdots \quad (24)$$

$$i = -dh/dx = \frac{\beta h_n}{L} e^{-\beta x/L}$$

いま $i_0 = (h_n - h_d)/L$ とすれば、 $\cdots\cdots$ (25)



図－3 指数関数をなす縦断図

$$\delta = i / i_0 = \frac{\beta}{1 - e^{-\beta}} e^{-\beta\lambda} \quad (\text{ただし } \lambda = x/L) \qquad \cdots\cdots \quad (26)$$

これを(22)式に入れると、

$$\frac{1}{\sqrt{\delta e}} = \int_0^1 \frac{e^{\beta\lambda/2}}{\sqrt{\beta/(1-e^{-\beta})}} d\lambda = \sqrt{\frac{1-e^{-\beta}}{\beta}} \cdot \frac{2}{\beta} \cdot (e^{\beta/2} - 1) \cdots\cdots \quad (27)$$

次に図－3のように、縦断図の面積を等しくするように引いた直線の勾配を i_k または δ_k とすれば、

$$\text{縦断図面積}\ \delta_1 = \int_0^{L} h\,dx = h_n \int_0^{L} e^{-\beta\frac{x}{L}}\,dx = h_n \frac{L}{\beta}\left(1-e^{-\beta}\right) \quad \cdots\cdots (28)$$

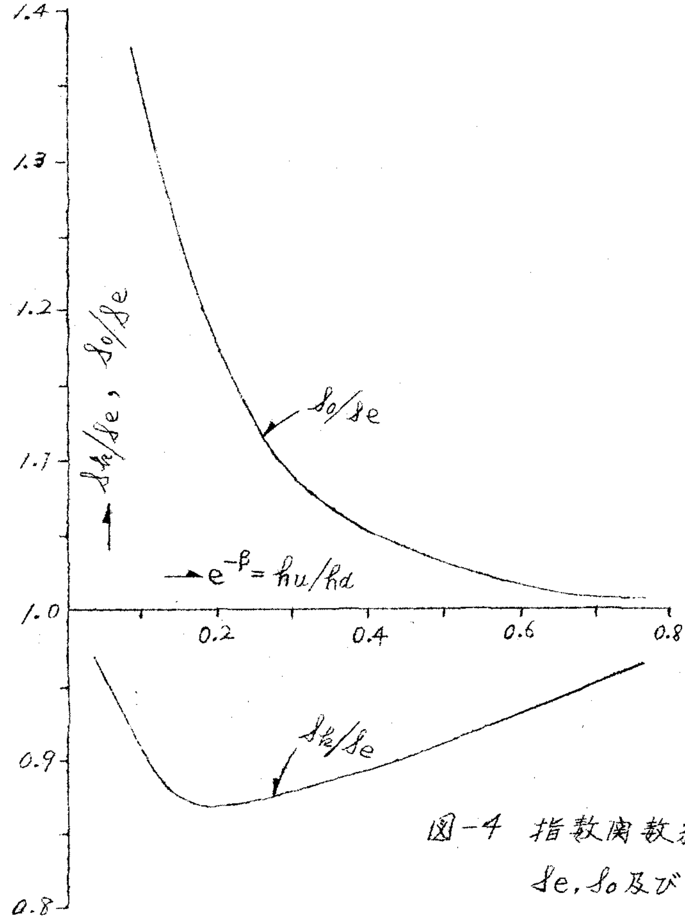
$$h_k\ h_d\ \text{線の縦断図面積}\quad S_2 = \left(h_k + h_d\right) L/2 \quad \cdots\cdots\cdots (29)$$

$$S_1 = S_2\ \text{より}\quad h_k = 2\,h_n\left(\frac{1-e^{-\beta}}{\beta}\right) h_d \quad \cdots\cdots\cdots (30)$$

$$\therefore\ \delta_k = i_k / i_o = \frac{h_k - h_d}{L} \Big/ \frac{h_n - h_d}{L} = 2\left(\frac{1}{\beta} - \frac{e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right) \cdots\cdots (31)$$

$$\text{上下流端を結んでえられる勾配}\ \delta_o = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (32)$$

なる故、(27)、(31) 式より各 β について、δ_o/δ_e 、および δ_k/δ_e を求めれば、図－4をうる。これによると、等価勾配は δ_o と δ_k の中間にあるが、h_d/h_n が



〔ただし δ_e は等価勾配、δ_o は上下流端を結ぶ勾配、δ_k は下流端より縦断図の面積を等しくするように引いた直線の勾配〕

図－4 指数関数縦断図における δ_e, δ_o 及び δ_k の比較

ほぼ0.25より大ではδ_oに近く、0.25より小ではδ_Kに近いといえる。

(2) 縦断図が2折線をなす場合。

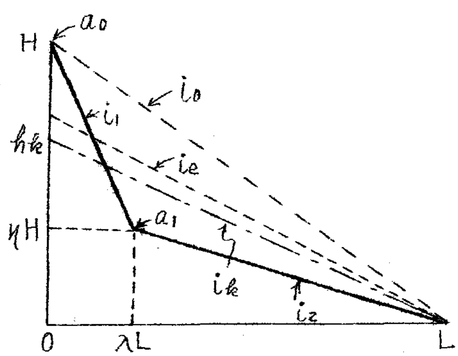
自然河川の縦断図は一般に、上流から下流に向つて、(23)式のβが大から小に変り、数種類の指数関数で表わされる。いま一つの指数関数の曲線を近似的に直線として、2種の直線よりなる縦断図について考察してみる。図−5に示すように、上下流端を結んでえられる勾配H/Lをi_oとすれば、

$$\delta_1 = i_1 / i_o = (1-\eta) / \lambda,$$

$$\delta_2 = i_2 / i_o = \eta / (1-\lambda) \quad \cdots\cdots\cdots (33)$$

したがつて、図−5の等価勾配は(21)式より

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_e}} = \frac{\lambda}{\sqrt{(1-\eta)/\lambda}} + \frac{(1-\lambda)}{\sqrt{\eta/(1-\lambda)}} \quad \cdots\cdots\cdots (34)$$



図−5 2折線よりなる縦断図

次に縦断図の面積が等しくなるように引いた直線の勾配i_Kすなわちδ_Kは、

$$\text{縦断図の面積} \quad S = \frac{H+\eta H}{2} \cdot \lambda L + \frac{\eta H}{2}(1-\lambda) L = \frac{h_K}{2} L \quad \cdots\cdots (35)$$

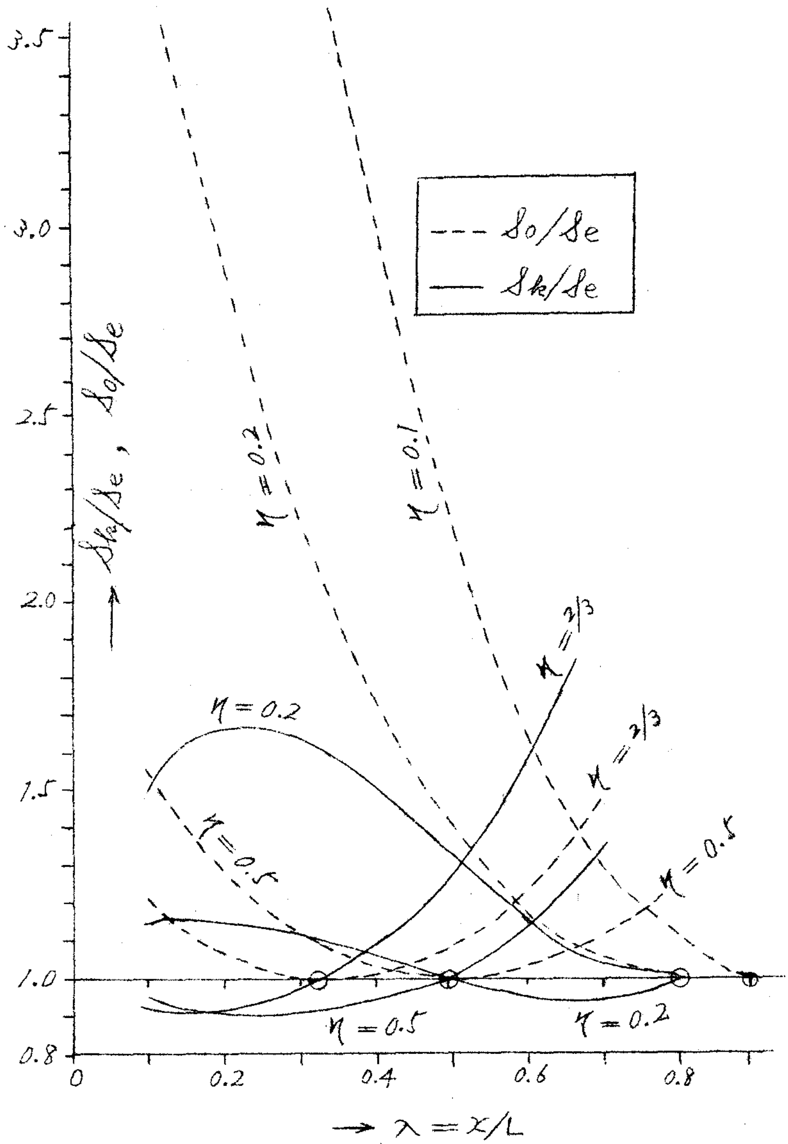
$$\therefore \quad h_K = (\lambda + \eta) H$$

$$\therefore \quad \delta_K = i_K / i_o = \frac{(\lambda+\eta) H}{L} \Big/ \frac{H}{L} = \lambda + \eta \quad \cdots\cdots (36)$$

上下流端を結んでえられる勾配$\delta_o = 1$なる故、各η、λについてδ_o / S_eおよびδ_K / δ_eを求めれば図−6となる。この図でもわかるように、$\lambda = 1-\eta$のとき2直線は1直線となつてしまうから、$\delta_e = \delta_o = \delta_K = 1$となる。 $\lambda < 1-\eta$は上流側が急勾配で下流側が緩勾配の場合であり、$\lambda > 1-\eta$はこの逆の場合である。普通$\lambda < 1-\eta$の場合であるから、この範囲で図−6を考察すると、

(1) δ_oはδ_eおよびδ_Kより急である。

(2) λ、ηが小になる程、すなわち縦断図が凹形になる程、δ_oはδ_eに比し非常に大となつてくる。



図―6　2直線よりなる縦断における
δ_e, δ_o 及び δ_k の比較

ただし $\eta = h / H$、また
δ_e、δ_o 及び δ_k の意味は図－4と同じ

(3)　η がおよそ0.3か0.4以上では δ_e は δ_o と δ_k の中間となるが、η がそれ以下では δ_e は δ_k よりさらに小さくなる。

(4) S_k は η が小になる程、s_e に比し大となるが、限度があり、それ程大とはならない。

(5) s_k が s_o より s_e に近い。

以上要するに、指数関数の場合での考察と考え合せて、縦断図の凹みの大きい場合では、s は s に近く、かつ s_k より小である。それ程凹みの大きくないときは、s_e は s_k と s_o の中間にくる。

5. む す び

これによつて等価勾配 s_e についての考察をおえるが、自然河川の縦断図については、数種の折線に近似させて、(21)式により s_e を求めればよい。また、上下流端を直線で結んでえられる勾配 s_o と、下流端より縦断図の面積が等しくなるように引いた直線の勾配 s_k と等価勾配 s_e との関係は図－4および図－6に示される。

なお、始めにのべたように、流出現象を代表する到達時間に対する勾配の影響は(14)式に示すように－1／2 P＝－0.34（p＝1.45とする）乗できき、かなり影響は小さくなるから、以上考察してきたことを参考として、縦断図から等価勾配を概略きめていつて十分ではないかと考える。

また以上の考察はすべて無次元化した値について行つたもので、横からの流入量の大きさ、および河道要素が変動しても変らない。横からの流入量 φ が時間的または場所的に変る場合については計算していないが、上記の結論を左右することはないと考える。

参 考 文 献

1） 末石富太郎：特性曲線法による出水解析について、土木学会論文集第29号 昭30.12

2） 篠原謹爾、上田年比古：筑後川上流部の出水解析第2報、九大応力研所報第13号 昭34.6

3） 上田年比古：降雨及び流域特性と到達時間及びその時刻の流量との関係について、（その1）、九大工学集報32巻3号、昭34.11