

円形梁より成る構造物の解法について
〔其 の 一〕

九 州 大 学

山 本 宏

円形梁より成る構造物の 解法について (其 一)

九州大学 山本 宏

円形梁を構造要素に持つ構造物は、土木建築の分野でも、至る所に見られるものである。ここでは、かかる構造要素が、その軸面に垂直な荷重をうける場合の基本式の誘導について述べる。それは修正撓角式と言えるものである。これら基本式を実際にはどう使って計算するか、又円形以外の形に曲った梁の計算方法については、次の機会に報告する。

基本式の誘導

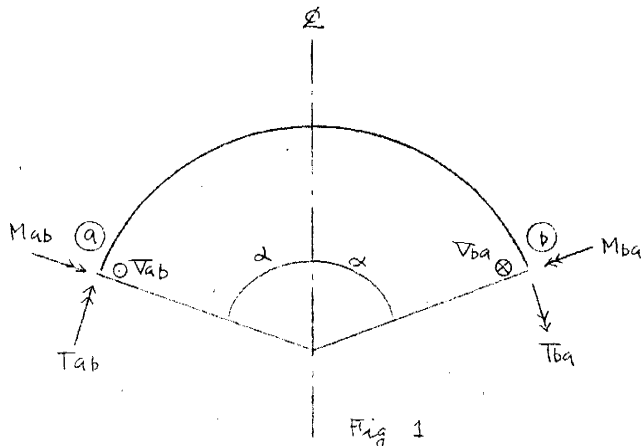
1. 端モーメントによる変形

図-1 に示す如く材端に曲げモーメントとねじりモーメントが作用する場合を考える。

Castiglianoの定理を用いると、

$$\partial U / \partial M_{ab} = \theta'_a, \quad \partial U / \partial M_{ba} = \theta'_b$$

$$U = \frac{r}{2EI} \int M^2 d\theta + \frac{r}{2GJ} \int T^2 d\theta$$



ここに θ' は切線角である。

これらの式を用いて端モーメントを変形の諸量で表わすと、次の式を得ることが出来る。

$$M_{ab} = K_{ab} (R_1 \varphi_a + R_2 \varphi_b + R_3 \psi_{ab})$$

$$M_{ba} = K_{ab} (R_2 \varphi_a + R_1 \varphi_b + R_3 \psi_{ab})$$

$$T_{ab} = R_4 M_{ab} + R_5 M_{ba}$$

$$T_{ba} = -(R_5 M_{ab} + R_4 M_{ba})$$

(1)

二二K

$$K_{ab} = I_{ab}/r$$

$$\varphi_a = 2E\theta_a, \varphi_b = 2E\theta_b, \varphi_{ab} = -6ER_{ab}$$

$$R_1 = \{K_1 + \lambda_{ab} K_3\} / 2 \{ (K_1 + \lambda_{ab} K_3)^2 - (K_2 + \lambda_{ab} K_4)^2 \}$$

$$R_2 = \{K_2 + \lambda_{ab} K_4\} / 2 \{ (K_1 + \lambda_{ab} K_3)^2 - (K_2 + \lambda_{ab} K_4)^2 \}$$

$$R_3 = \frac{1}{3} (R_1 + R_2)$$

$$R_4 = 2rA/cg^2 - c/2g$$

$$R_5 = 2rA/cg^2$$

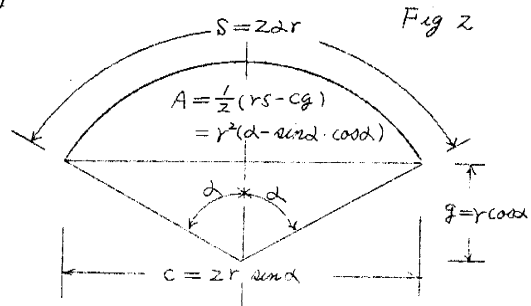
$$\lambda_{ab} = EI_{ab} / GJ_{ab}$$

$$K_1 = r^2 A / c^2 g^2 + c / 4g$$

$$K_2 = -r^2 A / c^2 g^2 + r / 4g^2$$

$$K_3 = r^2 A / c^2 g^2 + g / c - r / s$$

$$K_4 = r^2 A / c^2 g^2 - s / c^2 + r / s$$



とくに、 $\alpha = 90^\circ$ の場合は、以上の式は

$$M_{ab} = K_{ab} k'_i (3\varphi_a + \varphi_{ab})$$

$$M_{ba} = K_{ab} k'_i (3\varphi_b + \varphi_{ab})$$

$$T_{ab} = -\frac{2}{\pi} M_{ab}$$

$$T_{ba} = \frac{2}{\pi} M_{ba}$$

$$k'_i = 1 / \left\{ 3\pi + \frac{3(\pi^2 - 8)}{\pi} \lambda_{ab} \right\}$$

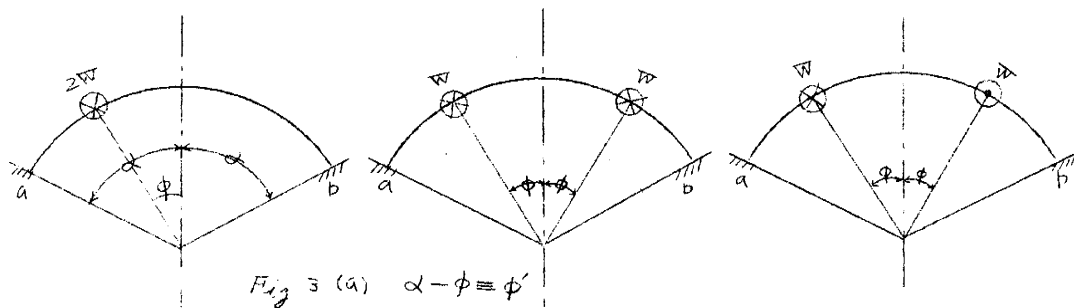
(2)

となる。

ス 荷重によるモーメント

荷重は梁の軸面に垂直にかかるものとする。この場合、まともに計算すると式の誘導が複雑となるので、図-3に示す様に、対称系と逆対称系に分けて考え、後で合成して結果を得んとする方法をとる。符号その他は、図-3参照のこと。Castiglianoの定理を用いた、その結果のみ記すと次の様である。

a. 集中荷重の場合



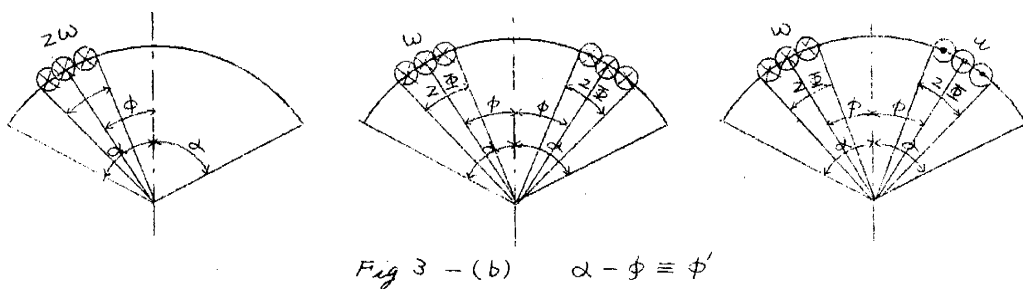
$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= [\alpha \cos \alpha - \mathcal{L} \alpha - (\phi - \sin \phi')] W r \\ M_{ba} &= -[\alpha \cos \alpha + \mathcal{L} \alpha + (\phi + \sin \phi')] W r \\ T_{ab} &= -[\alpha \sin \alpha + (\alpha \cot \alpha - 1) \mathcal{L} + (\phi + \sin \phi') \cot \alpha - 2 \cos \phi' + 1] W r \\ T_{ba} &= [-\alpha \sin \alpha + (\alpha \cot \alpha - 1) \mathcal{L} + (\phi + \sin \phi') \cot \alpha - 1] W r \end{aligned} \right\} (3)$$

二、二

$$\alpha = \frac{2[(\lambda_{ab}+1)\phi' \sin \phi + (\lambda_{ab}-1) \sin \alpha \sin \phi' + 2\lambda_{ab}(\cos \alpha - \cos \phi)]}{2\alpha(\lambda_{ab}+1) - (\lambda_{ab}-1) \sin 2\alpha}$$

$$\mathcal{L} = \frac{2(\lambda_{ab}+1)[\phi' \cos \alpha \sin \phi - \phi \sin \phi' - \alpha \phi] - (\lambda_{ab}-1) \phi \sin 2\alpha + 4\lambda_{ab} \sin \alpha \sin \phi}{(\lambda_{ab}+1)2\alpha^2 + (\lambda_{ab}-1)\alpha \sin 2\alpha - 2\lambda_{ab}(1 - \cos 2\alpha)}$$

b. 等分布荷重の場合



$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= 2\omega r^2 [\mathcal{L} \phi' + \sin \mathcal{L} \sin \phi' - 2 \mathcal{L} \cos \alpha - \mathcal{L} \alpha] \\ M_{ba} &= 2\omega r^2 [\mathcal{L} \phi' - \sin \mathcal{L} \sin \phi' + 2 \mathcal{L} \cos \alpha - \mathcal{L} \alpha] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} T_{ab} &= 2\omega r^2 \{ 2\lambda \sin \alpha - 2(\varpi - \sin \varpi \cos \phi) \\ &\quad + \mathcal{C}(1 - \alpha \cot \alpha) + \cot \alpha (\varpi - \sin \varpi \sin \phi) \} \\ T_{ba} &= 2\omega r^2 \{ 2\lambda' \sin \alpha - \mathcal{C}(1 - \alpha \cot \alpha) \\ &\quad - \cot \alpha (\varpi \phi' - \sin \varpi \sin \phi') \} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

こゝに

$$\mathcal{C} = \frac{\sin \varpi \{ (\lambda_{ab} + 1)(2 \cos \phi - \phi' \sin \phi) + (\lambda_{ab} - 1) \cos \phi' \cos \alpha \} - \varpi \{ (\lambda_{ab} + 1) \cos \phi \cos \varpi + 2 \lambda_{ab} \cos \alpha \}}{(\lambda_{ab} + 1) 2 \alpha - (\lambda_{ab} - 1) \sin 2 \alpha}$$

$$\mathcal{C} = \varpi + \frac{2 \left\{ \begin{aligned} &(\lambda_{ab} + 1) \{ \sin \alpha \sin \phi (2 \sin \varpi - \varpi \cos \varpi) \\ &\quad + \sin \varpi (\phi' \sin \alpha \cos \phi - \alpha \sin \phi') - \alpha \varpi \phi \} \\ &+ (\lambda_{ab} - 1) \sin \alpha \{ \sin \phi \sin \varpi - \phi \varpi \cos \alpha \} \end{aligned} \right\}}{(\lambda_{ab} + 1) 2 \alpha^2 + (\lambda_{ab} - 1) \alpha \sin 2 \alpha - 4 \lambda_{ab} \sin^2 \alpha}$$

c. その他の荷重を受ける場合及び $\alpha = 90^\circ$ の場合

略す。

以上のモーメントはすべて、荷重と梁の形状が与えられれば直ちに計算出来るものである。この荷重によるモーメント、 M_{ab} , M_{ba} , T_{ab} , T_{ba} をそれぞれ C_{ab} , C_{ba} , $\bar{C}_{ab}$, $\bar{C}_{ba}$ で表わすことにする。

1 及び 2 の和をとればモーメント式を得ることが出来る。これは即ち修正撓角式と称すべきものである。

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= K_{ab} \{ k_1 \varphi_a + k_2 \varphi_b + k_3 \varphi_{ab} \} + C_{ab} \\ M_{ba} &= K_{ab} \{ k_1 \varphi_b + k_2 \varphi_a + k_3 \varphi_{ab} \} + C_{ba} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

こゝに $\alpha = 90^\circ$ の場合は

$$\left. \begin{aligned} M_{ab} &= K_{ab} \{ R'_1 (3 \varphi_a + \varphi_{ab}) \} + C_{ab} \\ M_{ba} &= K_{ab} \{ R'_1 (3 \varphi_b + \varphi_{ab}) \} + C_{ba} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3. 撓み

図に於いて対称軸より P なる角度の所に下向きに P なる荷重が働いているものとすれば、この P 点の撓みは垂直下向きに $\partial \varpi / \partial P$ で与えられるはずである。 $\partial \varpi / \partial P$ の結果の式で $P=0$ とすれば、梁上任意点における撓みが計算されることになる。この場合、対称荷重、逆対称荷重に分けて考える。結果のみを記すと次の様である。

loaded arc の撓み

$\rho < \phi$ の時

$$\begin{aligned} \frac{2EI}{r^2} \delta &= K_1 M_0 - K_2 \nabla_0 r \\ &+ W r (1+\lambda) \{ 2\phi' \cos(\phi-\rho) - 2\cos\rho' \sin\phi' \\ &+ (\phi' - \sin\phi') (\rho' \cos\rho - \cos\alpha \sin\rho') \operatorname{cosec}\alpha \} \\ &+ 2\lambda \{ (\phi' - \sin\phi') (1 + \cos\rho') \\ &- 2\sin\rho' (1 - \cos\phi') \} \} \end{aligned}$$

$\rho > \phi$ の時

$$\begin{aligned} \frac{2EI}{r^2} \delta &= K_1 M_0 - K_2 \nabla_0 r \\ &+ W r (1+\lambda) \{ 2\rho' \cos(\rho-\phi) - 2\cos\phi' \sin\rho' \\ &+ (\phi' - \sin\phi') (\rho' \cos\rho - \cos\alpha \sin\rho') \operatorname{cosec}\alpha \} \\ &+ 2\lambda \{ 2(\rho' - \sin\rho') - (\rho' + \sin\phi') (1 - \cos\rho') \} \} \end{aligned}$$

unloaded arc の撓み

$$\begin{aligned} \frac{2EI}{r^2} \delta &= K_1 M_0 + K_2 \nabla_0 r \\ &+ W r (\phi' - \sin\phi') \{ -(1+\lambda) (\rho' \cos\rho \\ &- \sin\rho' \cos\alpha) \operatorname{cosec}\alpha + 2\lambda (1 - \cos\rho') \} \end{aligned}$$

==に

$$K_1 = (1+\lambda) (\sin\alpha \sin\rho' - \rho' \sin\rho) - 2\lambda \cos\alpha (1 - \cos\rho')$$

$$K_2 = (1+\lambda) \alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha (\cos\alpha \sin\rho' - \rho' \cos\rho)$$

$$+ 2\lambda (\rho + \sin\rho' - \alpha \cos\rho')$$

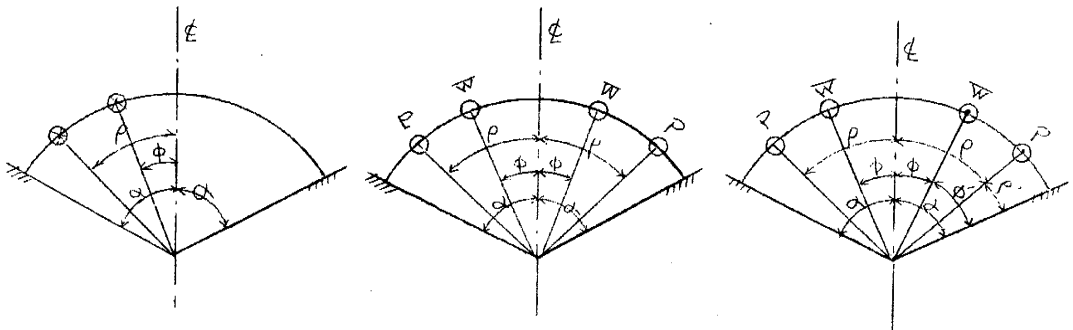


Fig 4 M_0, ∇_0 は $\phi=0$ における曲げモーメントと剪断力を表わす。

以上が基本式である。前述の如く、実際の計算方法は次の機会に述べることにする。