粒体のつめこみに関する研究

九州大学　水野高明
○徳光善治

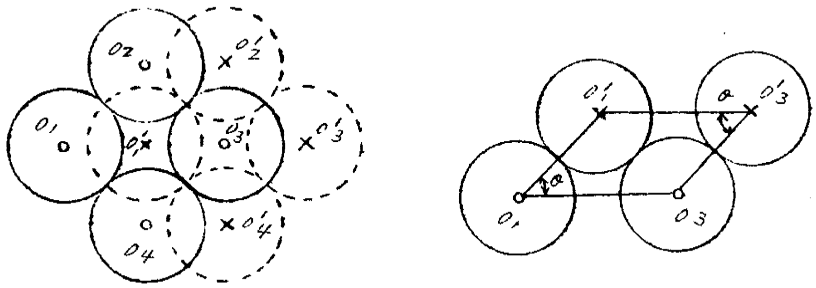
1. 序　説

粒体のつめこみの研究は、殆んどが粒体を完全球として幾何学的に取扱つたものである。しかし、粒体は一般に完全球である事は少なく、形状、寸法、面の粗さ等により夫々異つて来る。これらの性質をある実験的係数を導入する事により、理論と実験から本研究を進めてみた。未だ実験の数も少なく、将来の研究にまつ所も多いが、現在までの概要を報告する。

2. 単一要素のつめこみ

粒子の形状、寸法の相等しい単一要素のつめこみの代表的なものは同一の完全球のつめこみである。この模型として図一1の如く直角平面格子状に配された球の層が、各層平行に重なり合つたものを考える。

図一1　単一球のつめこみ模型



この様な配列に於て第1層の4球，第2層のこれに対応する4球の中心を結んで作られる平行六面体を単位骨組とする．この2層の垂直距離を $d\sin\theta$ で示す事が出来るなら、単位骨組の容積は $d^3\sin\theta$ となる．θは $45\sim90°$ の間で変化し間隙率 pは最密時 25.95%、最粗時 47.64%となる。

これは粒子相互が完全な接觸をなしたと仮定した場合で、一般には

粒子の完全な接触は望まれない。今各粒子間にδなる接触拡がりをもつとすると、単位骨組容積は$(d+\delta)^3 \sin\theta$となり、間隙率pは次式で示される。

$$p = 1 - \frac{\pi}{6\left(1+\frac{\delta}{d}\right)^3 \sin\theta} \qquad (1)$$

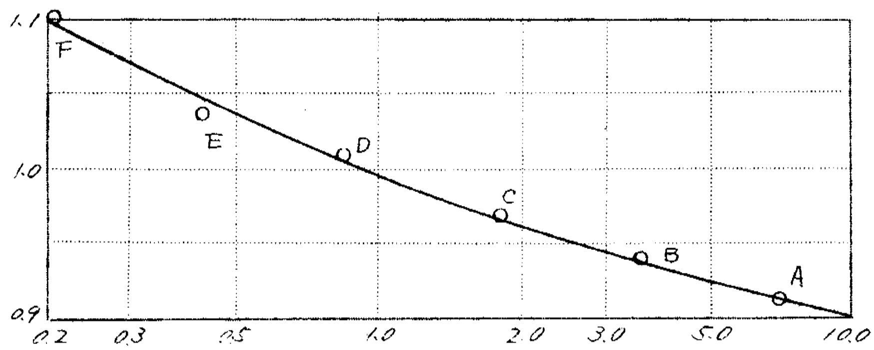
実験上、このpをθとδの2因子に分ける事は困難である。一般に最も粗な配列と考えられている$\delta = 0$、$\theta = 90^\circ$の場合の単位骨組容積を1とし、種々の試料の単位骨組容積をφとするとφは

$$\varphi = \frac{6(1-p)}{\pi} \qquad (2)$$

φの値は形状が似ている時、粒径に応じて変化し図－2の関係が得られる。これは室見川産の砂を篩分けた試料でAは10～5 mm、Bは5～2.5 mm、Cは2.5～1.2 mm、Dは1.2～0.6 mm、Eは0.6～0.3 mm、Fは0.3～0.15 mmのものである。これらの球換算平均粒径d_mは単位容積中の個数Nを数える事により、次式より求めた。

$$d_m = \sqrt[3]{\frac{(1-p)\pi}{6N}} = 1.24\sqrt[3]{\frac{1-p}{N}} \qquad (3)$$

図－2　粒度とφ値



粒　径　d_m (mm)

即ち、Aに於て$p = 41\%$の時、平均$N = \frac{650\text{個}}{200\,cm^3} = 3.25$個/$cm^3$の実験値より$d_m \fallingdotseq 2.1\,cm$、同一系統の砂であるので他のB～F

にも採取粒径の範囲と平均粒径の間に相似の関係が成り立つとすると他の粒径のものも平均粒径を算出する事が出来る。この様にPの値は同一形状の砂では粒径が小なる程大となり、従って嵩ばりが大となる事が言える。

3、2 要素混合のつめこみ

単一要素のつめこみでは前述の如く、つめこみ方法が一定なら、ある定まった間隙をもっている。しかしこの間隙の中にも更に小さな粒径のものであれば挿入する余地はある。この様にして全体としての間隙率Pはより小さくする事が出来るであろう。

2要素の中大きな粒径のものを第1要素、小さな粒径のものを第2要素とする。容器全体の容積をV、第1第2夫々の要素の実質容積をV_1、V_2、間隙率を$p_1 = 1 - \frac{V_1}{V}$、$p_2 = 1 - \frac{V_2}{Vp_1}$、及び直径を$d_1$、$d_2$とし、第1要素の配合率　$K_1 = V_1/(V_1 + V_2)$、第2要素の配合率　$K_2 = V_2/(V_1 + V_2)$とする。

2要素混合つめこみには、つめこみの主体となる骨組をつくる要素により次の2種が考えられる。(a) 第1要素による骨組が完全にVを満たし、その間隙に第2要素が入っている場合。(b) 第1要素の骨組ではVを満たし得ず、むしろ第2要素の骨組の中に第1要素が点在している場合。

(a) 第 1 要 素 主 体

第1要素が作る骨組の中に第2要素が入るのであるから、単一つめこみの場合の間隙率p_{1m}を保つなら、単一つめこみ時の間隙率p_{2m}をもつ第2要素をつめこめば当然得られる間隙率Pは$p_{1m}p_{2m}$になる。しかし実験によると第1要素の間隙率p_1は第2要素の混入によりp_{1m}より増加する。この関係は

$$p_1 = p_{1m} + (1 - K_1)(\beta_1 + \beta_2 \lambda)$$
$$= p_{1m} + K_2(\beta_1 + \beta_2 \lambda) \qquad (4)$$

こゝで　$\lambda = d_2/d_1$

β_1、β_2 は組合せる2要素の性質によつて決定される係数

それ故、得られる全体の間隙率Pは

$$P = \frac{V - V_1 - V_2}{V} = 1 - \frac{1 - p_1}{K_1}$$

(b) 第2要素主体

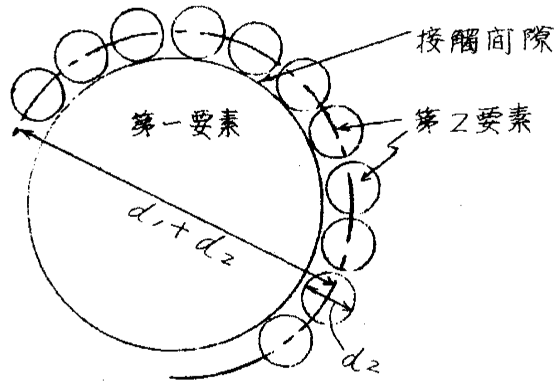
第1要素の実容積は V_1 であるから、残余の空間は（$V - V_1$）である。　　第2要素はこの空間をうめるが、第1要素と第2要素の接觸面には余分の空隙をもち、第2要素から考えると第2要素の固有の間隙 p_{2m} でつまり得る容積は $V - \alpha V_1$ となる。即ち実際の容積 V_1 よりも第1要素は（$\alpha - 1$）V_1 だけ大きな容積をもつと考える。従つて第2要素の実質容積 V_2 は

$$V_2 = (1 - p_{2m})(V - \alpha V_1) \quad (6)$$

又 $V_2 = \frac{K_2}{K_1} V_1$ であるから、全体の間隙率Pは

$$P = \frac{V - V_1 - V_2}{V} = \frac{p_{2m} - K_1\{1 - \alpha(1 - p_{2m})\}}{1 - K_1\{1 - \alpha(1 - p_{2m})\}} \quad (7)$$

図－3　接觸の状態



この α の意味を考えると、図－3の如く第1要素の周りには第2要素が取りまいている。第1要素と第2要素の間の間隙は、第1要素の中心を中心とした直径（$d_1 + d_2$）の球からその中に含まれる第1要素及び第2要素の実質部を差引いたものである。（$d_1 + d_2$）球の体積は $\frac{\pi}{6}(d_1 + d_2)^3$、第1要素の体積は $\frac{\pi}{6} d_1^3$ である。

第2要素の体積は個々のものが近似的に半球 $\frac{\pi}{12}d_2^3$ であり、かつその数は第1要素の表面積 A_1 について A_1/d_2^2 個とする。この様な第1要素は単位容積中に(3)式より $N=\pi(1-p_1)/6d^3$ 個あるから、単位容積中の第1要素の全表面積 A_1 は、

$$A_1 = \frac{6(1-p_1)}{d_1} \qquad (8)$$

従って全容積中にこの様な間隙 V_v は近似的に次式となる。

$$V_v \fallingdotseq V\left\{\frac{\pi}{6}d_1^3 N \times 3\lambda - \frac{\pi d_2^3}{12} \times \frac{A_1}{d_2^2}\right\}$$

$$= 3V(1-p_1)\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\lambda \qquad (9)$$

この V_v は完全な損失ではなく、第2要素の間隙率も考慮せねばならないであろう。今仮に完全な接觸損失として V_v をとる代りに(9)式右項に補正の f を入れると

$$\frac{V_v}{V} = 3f(1-p_1)\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\lambda$$

しかるに

$$\alpha V_1 = V_1 + V_v \qquad (10)$$

であるから

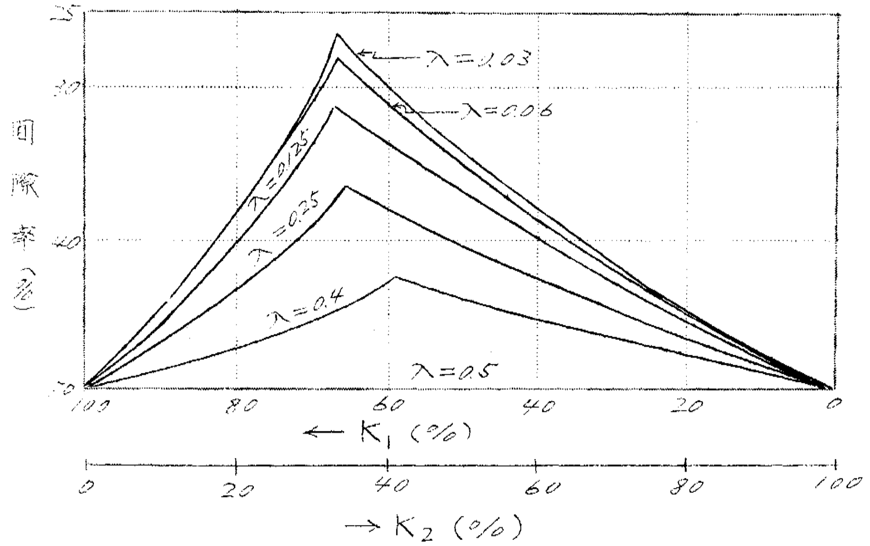
$$\alpha = 1 + 1.43 f\lambda \qquad (11)$$

となる。2要素の相互の関係から f 及び λ を決める事が出来れば、α を求めた後(7)式より間隙率 P を求める事が出来る。

(C) 最小間隙率

以上両極端から夫々式を導いたのであるが、実際の場合、(5)及(7)式の大きな数値に支配される。例えば $\beta_1=0$、$\beta_2=1$、$f=1$、及び $p_{1m}=p_{2m}=0.5$ とすると λ の値により P は図-4の如く変化する。この最小間隙率は λ が小なる程小さい値を与え、その配合率は一定値に近づく事がわかる。又最小間隙率を与える配合率は次式からも求められる。

図－4　2要素混合つめこみの間隙率



$$1-K_1=K_2=\frac{1}{\alpha\beta}\left\{\xi_1+\frac{\alpha\beta-1}{\alpha\xi_2-1}\xi_2-\sqrt{\left(\xi_1+\frac{\alpha\beta-1}{\alpha\xi_2-1}\right)^2-4\beta\xi_2\frac{\alpha\xi_1-1}{\alpha\xi_2-1}}\right\}$$

$\cdots\cdots(12)$

但し　$\beta=\beta_1+\beta_2\lambda$

$\xi_1=1-p_1 m$

$\xi_2=1-p_2 m$