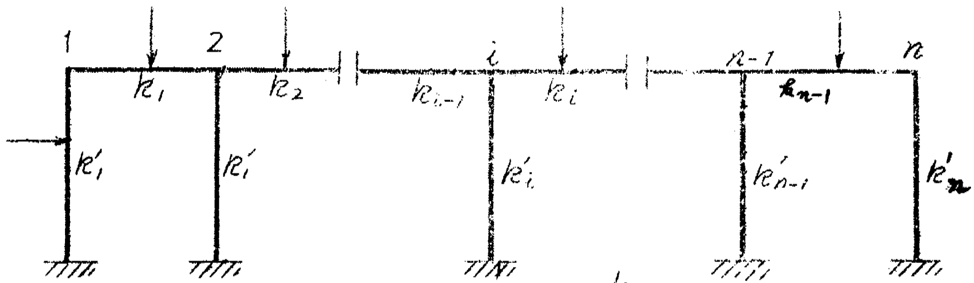
單層連続ラーメンの一解法

(連立3項式の解法 つゞき)

八女工業高校　塚本正文

§1. 要旨

図－1の如き單層連続ラーメンの弾性方程式は次に表示する如く、各節点毎に立てられるモーメント式と、一つの剪力式から成立っている。



図－1.　　k ＝部材剛比

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	------	ϕ_{n-1}	ϕ_n	ψ	右辺
モーメント式	1	μ'_1					$-\rho_1$	C_1
	μ_1	1	μ'_2				$-\rho_2$	C_2
		μ_2	1	$\longrightarrow$	μ'_{n-2}		$\downarrow$	$\downarrow$
				$\longrightarrow$	1	μ'_{n-1}	$-\rho_{n-1}$	C_{n-1}
				$\longrightarrow$	μ_{n-1}	1	$-\rho_n$	C_n
剪力式	$-t_1$	$-t_2$	$-t_3$	$\longrightarrow$	$-t_{n-1}$	$-t_n$	1	S

こゝに、ϕ ＝節点角(モーメント)　　ψ ＝部材角(モーメント)

$$\mu'_i=\frac{k_i}{j_i}\qquad \mu_i=\frac{k_i}{j_{i+1}}\qquad -\rho_i=\frac{k'_i}{j_i}\qquad j=2(k_{i-1}+k_i+k'_i)$$

$$-t_i=\frac{3k'}{2\Sigma k'_i}\qquad C_i,\ S \text{ は荷重項}$$

この連立方程式を解くに当り、剪力式は切離して独立の一式として取扱い

モーメント式はψの項を右辺へ移してφに関する3項式と見做し、これを幾つかに組分けして、さきに報告した方法[1]を応用すれば割合に手際よく解き得ることを確めた。以下本研究の概要を述べる。

§.2. 計算法

(1). 前述の如く、モーメント式はψの項を右辺へ移して3項式の形に書きかえた後、幾つかに組分けする、例えば第i式で区切って次の如くA, B二組に分ける。

Aの組

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	------	ϕ_i	右辺
1)	1	μ_1'				$c_1+\rho_1\psi$
2)	μ_1	1	μ_2'			$c_2+\rho_2\psi$
⋮			------			------
i)				μ_{i-1}	1	$c_i+\rho_i\psi-\mu_i'\phi_{i+1}$

Bの組

	ϕ_{i+1}	ϕ_{i+2}	--------	ϕ_n	
$i+1$)	1	μ_{i+1}'			$c_{i+1}+\rho_{i+1}\psi-\mu_i\phi_i$
$i+2$)	μ_{i+1}	1	μ_{i+2}'		$c_{i+2}+\rho_{i+2}\psi$
⋮			-------		-------
n)			μ_{n-1}	1	$c_n+\rho_n\psi$

区切り目の第(i), 及び第($i+1$)式の右辺は、$-\mu_i'\phi_{i+1}$, $-\mu_i\phi_i$ の補正項を含んでいる。これらを区切り目補正項とよぶことは前報[1]の通りである。

(2). まず、計算の出発点となるφの第1近似値$\phi^{(1)}$を次の様にして決める。すなわち、右辺のψ及び区切り目補正項を省略したモーメント式(3項式)を満足するφを求める、これを記号ϕ'で表わせば、その解式は次の通りである。

$$\left.\begin{aligned}
\phi_1' &= \beta_{1\cdot1}c_1+\beta_{1\cdot2}c_2+\cdots\cdots+\beta_{1\cdot i}c_i\\
\phi_2' &= \beta_{2\cdot1}c_1+\beta_{2\cdot2}c_2+\cdots\cdots+\beta_{2\cdot i}c_i\\
&\vdots\\
\phi_i' &= \beta_{i\cdot1}c_1+\beta_{i\cdot2}c_2+\cdots\cdots+\beta_{i\cdot i}c_i\\
\phi_{i+1}' &= \beta_{i+1\cdot i+1}c_{i+1}+\beta_{i+1\cdot i+2}c_{i+2}+\cdots+\beta_{i+1\cdot n}c_n\\
&\vdots\\
\phi_n' &= \beta_{n\cdot i+1}c_{i+1}+\beta_{n\cdot i+2}c_{i+2}+\cdots+\beta_{n\cdot n}c_n
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

こゝに，$\beta_{j\cdot k}$ は $C_k = 1$　$C_1 = C_2 = \cdots C_{k-1} = C_{k+1} = \cdots C_n = 0$ のとき ϕ'_j の値である。

次に区切り目補正項の影響のみを考えて，これらの ϕ' に加うべき補正値 $\Delta\phi'$ を次式から算定する.（前報[1]）

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\phi'_1 &= \beta_{1i}\Delta C_i \\
\Delta\phi'_2 &= \beta_{2i}\Delta C_i \\
&\vdots \\
\Delta\phi'_i &= \beta_{ii}\Delta C_i \\
\Delta\phi'_{i+1} &= \beta_{i+1,i+1}\Delta C_{i+1} \\
&\vdots \\
\Delta\phi'_n &= \beta_{n,i+1}\Delta C_{i+1}
\end{aligned}\right\} \quad \text{------} \quad (2)$$

こゝに

$$\Delta C_i = \frac{1}{D'}\left(r_i\beta_{i+1,i+1}\phi'_i - \mu'_i\phi_{i+1}\right)$$

$$\Delta C_{i+1} = \frac{1}{D'}\left(-\mu_i\phi'_i + r_i\beta_{ii}\phi'_{i+1}\right)$$

$$r_i = \mu_i\mu'_i,\quad D' = 1 - r_i\beta_{ii}\beta_{i+1,i+1}$$

かくして，第1近似値 $\phi_k^{(1)}$（$k = 1, 2, 3, \cdots n$）は

$$\phi_k^{(1)} = \phi'_k + \Delta\phi'_k \quad \text{-----------} \quad (3)$$

(3). モーメント式の $C=0$，区切り目補正項 $=0$ とおいて ψ を消去し，これを剪力式に代入して ψ を求めると，

$$\psi = \frac{1}{A}\left(\sum t\phi + S\right)$$

である．こゝに

$$A = 1 - \left(\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} t_k\rho_j\beta_{kj} + \sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} t_k\rho_j\beta_{kj}\right)$$

この式の中に式(3)の $\phi^{(1)}$ を代入して得られる ψ を，その第1近似値 $\psi^{(1)}$ と定める．

$$\psi^{(1)} = \frac{1}{A}\left(\sum t\phi^{(1)} + S\right) \quad \text{----------} \quad (4)$$

これを上記モーメント式（$C=0$，区切り目補正項 $=0$）に代入して，$\phi^{(1)}$ に与うべき第1次補正量を求め，これを記号 $\Delta\phi^{(1)}$ で表わす．すなわち，

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\phi_2^{(1)}=\sum_{j=1}^{i}\rho_j\beta_{2\cdot j}\times\psi^{(1)}\\ \quad\vdots\\ \Delta\phi_i^{(1)}=\sum_{j=1}^{i}\rho_j\beta_{i\cdot j}\times\psi^{(1)}\\ \text{- - - - - - - - - - - - - -}\\ \Delta\phi_{i+1}^{(1)}=\sum_{j=i+1}^{n}\rho_j\beta_{i+1\cdot j}\times\psi^{(1)}\\ \quad\vdots\\ \Delta\phi_n^{(1)}=\sum_{j=i+1}^{n}\rho_j\beta_{n\cdot j}\times\psi^{(1)}\end{array}\right\}\text{ - - - - - - - - (5)}$$

これらの式の係数は一見複雑の様であるが、あらかじめ一定の規則のもとに表記して計算すれば、思いの外簡単で何等煩雑な感じはない。

(4). 次に、モーメント式を用いて $\Delta\phi^{(1)}$ の補正値 $\Delta\phi'^{(1)}$ を求める。すなわち、$C=\psi=0$ と置き、区切り目補正項の影響のみを考えて計算するのである。式(2)の ϕ_i', ϕ_{i+1}' の代りに $\Delta\phi_i^{(1)}$, $\Delta\phi_{i+1}^{(1)}$ を置いて計算すれば $\Delta\phi'^{(1)}$ が得られる。

この $\Delta\phi'^{(1)}$ を式(4)の $\phi^{(1)}$ に代入し、$S=0$ として得られる ψ の値が $\psi^{(1)}$ の第1次補正値 $\Delta\psi^{(1)}$ である。さらに $\Delta\psi^{(1)}$ を式(5)の $\psi^{(1)}$ に代入して $\phi^{(1)}$ の第2次補正値 $\Delta\phi^{(2)}$ を見出す。

(5). 以下同様にして補正値 $\Delta\phi'^{(2)}$, $\Delta\psi^{(2)}$, $\Delta\phi^{(3)}$------を計算すると、これらの値は逐次0に接近する。これらが ϕ 及び ψ の所要末位に影響しなくなった所で計算を打切り

$$\phi=\phi^{(1)}+\Delta\phi^{(1)}+\Delta\phi'^{(1)}+\Delta\phi^{(2)}+\text{-------}$$
$$\psi=\psi^{(1)}+\Delta\psi^{(1)}+\Delta\psi^{(2)}+\text{-----------}$$

として ϕ 及び ψ を決定する。

§3. 例題

モーメント式

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	右　辺
(1)	1	0.3333		$8.3333-0.1667\psi$
(2)	0.1754	1	0.1930	$-4.3860-0.1316\psi$
(3)		0.1774	1	$6.4516-0.1210\psi-0.2016\phi_4$

	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	右　辺
(4)	1	0.1587		$-6.3492-0.1429\psi-0.1984\phi_3$
(5)	0.1852	1	0.1667	$4.6297-0.14824\psi$
(6)		0.3000	1	$-8.3333-0.2000\psi$

剪 力 式

$$-0.1744\phi_1-0.2616\phi_2-0.2616\phi_3-0.3139\phi_4-0.2791\phi_5-0.2093\phi_6=\psi$$

上記モーメント式は(1)〜(6)の連立式を(1)から(3)までと(4)から(6)までの2組に組分けしたもので、剪力式は水平荷重なく、したがって $S=0$ の場合である。これを次図の如く表記して計算する。

(1). A 欄に、弾性方程式の各係数を記入する。B 欄にはモーメント式係数 μ, μ' を用いて、式(1)の β を計算し、これを縦に記入する。例えば ϕ_1 の列には $\beta_{1\cdot1}$, $\beta_{1\cdot2}$, $\beta_{1\cdot3}$ が記入される。C 欄には B 欄の β の値に A 欄の ρ の値を各行毎に掛けた後、縦に加えて式(5)の $\Sigma\rho\beta$ を求める。例えば、ϕ_1 の列には $\rho_1\times\beta_{1\cdot1}=-0.1667\times1.0644=-0.1774$, $\rho_2\times\beta_{1\cdot2}=-0.1316\times-0.3674=0.0483$ $\rho_3\times\beta_{1\cdot3}=-0.1210\times0.0709=-0.0086$ これらを加えて、$\Sigma\rho_j\beta_{i\cdot j}=-0.1377$. D 欄には、A 欄の t に C 欄の $\Sigma\rho\beta$ を掛けた $t\Sigma\rho\beta$ が記入される。これらの $t\Sigma\rho\beta$ を加え合せて $\Sigma t\Sigma\rho\beta=0.1771$. これより式(4)の $\frac{1}{A}=\frac{1}{1-0.1771}=1.2152$ を求め D 欄中央区切り目空欄に記入する。以上の準備計算で得た諸値を使って、ϕ 及び ψ を計算する。

(2). A 欄の C に B 欄の β を各行毎に掛けて式(1)の ϕ' が計算される。E 欄の上段がそれである。例えば $\phi_1'=8.3333\times1.0644-4.3860\times-0.3674+6.4516\times0.0709=8.8704+1.6113+0.4574=10.9391$

(3). 次に、区切り目の ϕ_3', ϕ_4' を A 欄中央に記した式に代入して ΔC_3, ΔC_4 を計算する。例えば $\Delta C_3=0.0431\phi_3-0.2106\phi_4=0.0431\times7.8387-0.2106\times-7.5896=0.3380+1.5986=1.9366$. ΔC_3 を B 欄左の第3行 β に掛け、

ΔC_4をB欄右の第1行βに掛けて$\Delta\phi'$を得る。ϕの第1位近似値

$\phi^{(1)}=\phi_1'+\Delta\phi'$は，E欄最下行に求められる．

(4). I欄の上方には，E欄で求めた$\phi^{(1)}$にA欄のtを掛けた値が記入される．例えばϕ_1列は$11.0764\times -0.1744=-1.9319$である．これらを横に加え合せた値に$1/A=1.2152$を掛けると$\psi^{(1)}=0.7647$が得られる．

(5). この$\psi^{(1)}$にC欄の$\sum\rho\beta$を掛けて式(5)の$\Delta\phi^{(1)}$を出し，これをF欄上方に記入する．次に区切り目の$\Delta\phi_3^{(1)}$, $\Delta\phi_4^{(1)}$を用い，(3)で計算した方法により，$\Delta\phi'^{(1)}$を求める．

(6). さらに$\Delta\phi'^{(1)}$にA欄のものを掛けてJ欄上方に記入し，これらを横に加えた値-0.0073に$1/A=1.2152$を掛けて$\Delta\psi^{(1)}=-0.0089$を出す．(4)の計算と異なるのは$\Delta\phi^{(1)}+\Delta\phi'^{(1)}$に$t$を掛けるのではなくて$\Delta\phi'^{(1)}$のみに$t$を掛けることに注意する．

(7). この$\Delta\psi^{(1)}$を使って(5).(6)の方法によってϕ及びψの第2次補正値を計算する．本例ではϕの第2次補正で充分の精度が得られた．($\Delta\phi^{(2)}\fallingdotseq 0$)ので計算を打切り，E.F.G欄の値を加えてH欄のϕを得る．又K欄には，I.J欄の値を加えてψの値が記入される．

§4. 結び

例題で了解される様に、本法によれば$\Delta\phi$及び$\Delta\psi$は速かに收斂し、且つ計算はすべて一定の規則によつて整然と表記して行はれ，特別に煩雑な感じは起らない。実際本例題は数十分も要せずに完了したのである．

また、こゝでは説明を省いたが、熊本大学吉村先生の論文「級数和を利用するモーメント分配法」[2)]のμの高次項を省略した附表を利用すれば、モーメント式を組分けすることなく簡單にϕ及びψの近似値が得られ，非常に便利であることを附言する．著者はさらに本法を一般多層ラーメンに適用すべく研究中である．本研究に際し，絶えず激励と叱正を與えられた九大教授，村上正先生，

並びに適切な助言を賜った熊大吉村先生に対し深く謝意を捧げる次第である.

1). 拙著　連立3連式の一解法　昭29.前期土木学会西部支部研究発表会講演概要

2). 吉村虎蔵「級数和を利用するモーメント分配法」熊大研究報告 第2巻第3号

A	$1/D = 1.1022$ μ' 0.3333 0.1930 μ 0.1754 0.1774 γ ϕ_1 0.05848 ϕ_2 0.03424 ϕ_3	0.2016 0.1984 0.04000	$1/D = 1.0862$ 0.1587 0.1667 0.1852 0.3000 ϕ_4 0.02939 ϕ_5 0.05000 ϕ_6
	ρ -0.1667 -0.1316 -0.1210 c 8.3333 -4.3860 6.4516 (t) -0.1744 -0.2616 -0.2616	$\gamma\beta_{3\cdot3}\beta_{4\cdot4} = 0.04284$ $1/D' = 1.0447$	-0.1429 -0.1482 -0.2000 -6.3492 4.6297 -8.3333 -0.3139 -0.2791 -0.2093
B	1.0644 -0.1934 0.0343 (β) -0.3674 1.1022 -0.1955 0.0709 -0.2127 1.0377	ΔC_3 ΔC_4 $0.0431\phi_3$ $-0.2073\phi_3$ + + $-0.2106\phi_4$ $0.0434\phi_4$	1.0319 -0.2012 0.0603 -0.1724 1.0862 -0.3259 0.0287 -0.1810 1.0543
C	-0.1744 0.0322 -0.0057 $\rho\beta$ 0.0483 -0.1450 0.0257 -0.0086 0.0257 -0.1255 ($\Sigma\rho\beta$) -0.1377 -0.0871 -0.1055		-0.1474 0.0287 -0.0086 0.0255 -0.1609 0.0483 -0.0057 0.0362 -0.2109 -0.1276 -0.0960 -0.1712
D	$t\Sigma\rho\beta$ 0.0240 0.0228 0.0276	$\Sigma t\Sigma\rho\beta = 0.1771$ $1/A = 1.2152$	0.0401 0.0268 0.0358
E	8.8704 -1.1614 0.2859 1.6113 -4.8341 0.8577 0.4574 -1.3722 6.6951 ϕ' 10.9391 -7.8177 7.8387 $\Delta\phi'$ 0.1373 -0.4119 2.0097 $\phi^{(1)}$ 11.0764 -8.2296 9.8484	ΔC_3 ΔC_4 0.3380 -1.6249 1.5986 -0.3292 1.9366 -1.9541	-6.5519 1.2772 -0.3832 -0.7982 5.0289 -1.5087 -0.2395 1.5087 -8.7859 -7.5896 7.8148 -10.6778 -2.0165 0.3931 -0.1179 -9.6061 8.2079 -10.7957
F	$\Delta\phi^{(1)}$ -0.1053 -0.0666 -0.0807 $\Delta\phi^{(1)'}$ 0.0012 -0.0036 0.0177	-0.0035 0.0167 0.0206 -0.0042 0.0171 0.0125	-0.0976 -0.0734 -0.1309 0.0129 -0.0025 0.0007
G	$\Delta\phi^{(2)}$ 0.0012 0.0008 0.0009 $\Delta\phi^{(2)'}$ 0 0 -0.0002	0 -0.0002 -0.0002 0	0.0011 0.0008 0.0015 -0.0002 0 0
H	ϕ 10.9735 -8.2990 9.7861		-9.6899 8.1328 -10.9244
	(H = E + F + G)		
I	$\psi^{(1)}$ -1.9319 2.1531 -2.5766	$\Sigma = 0.6293$ $\psi^{(1)} = 0.6293 \times 1.2152 = 0.7647$	3.0158 -2.2906 2.2595
J	$\Delta\psi^{(1)}$ -0.0002 0.0009 -0.0046	$\Sigma = -0.0073$ $\Delta\psi^{(1)} = -0.0073 \times 1.2152 = -0.0089$	-0.0040 0.0007 -0.0001
K		$\psi = \psi^{(1)} + \Delta\psi^{(1)} = 0.7558$	
	(K = I + J)		