連立3項方程式の一解法

八女工業高校　塚本正文

§.1　まえがき

連続梁、一層連続ラーメン等の弾性方程式は、連立3項式となることが多い。その解法については多くの権威者によって種々有効な方法が示されているが、こゝでは最も普遍的に行われているイテラチオン法をとり、それについての一案を述べる。その要点は次の通り。

(1) 先づ、基本的な3元連立式の解式を与える。

(2) 与えられた多元連立式を三つづゝに区切り、これを幾組かの3項式に分ける。

(3) 各組毎に(1)に与えた基本式を用いて近似解を求め、これに補正を加えつゝ逐次与式を満足する真値に近づける。

この様な方法によると、現行のイテラチオン法によるよりも反覆計算の回数を減じ、手数が大いに省かれる。

本研究に際し九大教授、村上正先生の熱心な御教示と周密な御助言を仰いだ。こゝに同先生に厚く謝意を表する次第である。

§.2.　3元3項式の解

次の如き3元3項式を考える。

x_1	x_2	x_3	右辺(常数項)
1	μ_1'		C_1
μ_1	1	μ_2'	C_2
	μ_2	1	C_3

こゝでは工業上普通に現はれる式を取扱うのであつて、対角線項が他にくらべて特に大きく、従つて $\mu<1$, $\mu'<1$ なることを仮定する。

本式の解は簡単に求められ、次の結果を得る．

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1-r_2}{D}C_1 - \frac{\mu_1'}{D}C_2 + \frac{\mu_1'\mu_2'}{D}C_3 \\ x_2 &= -\frac{\mu_1}{D}C_1 - \frac{1}{D}C_2 - \frac{\mu_2'}{D}C_3 \\ x_3 &= \frac{\mu_1\mu_2}{D}C_1 - \frac{\mu_2}{D}C_2 + \frac{1-r_1}{D}C_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1)$$

ここに $D=\begin{vmatrix} 1 & \mu_1' & 0 \\ \mu_1 & 1 & \mu_2' \\ 0 & \mu_2 & 1 \end{vmatrix} = 1-r_1-r_2$ にして

$\mu_1\mu_1'=r_1 \quad \mu_2\mu_2'=r_2$ である．

§.3. 多元3項式

與式を三つづゝ一組として，全体を幾組かに組分けし，各組毎に式(1)を用いて x を出す．これを x の第1近似値 $x^{(1)}$ とし，$x^{(1)}$ に補正值 Δx を加えることにより逐次目的の真値に近づける．組分けの結果第 n 式と第 $n+1$ 式の間が区切り目になつたとする．区切り目の両式の常数を特に C' で表はすと前の組第3式と後の組第1式の右辺はそれぞれ $C_n=C_n'-\mu_n' x_{n+1}$ $C_{n+1}=C'_{n+1}-\mu_n x_n$ と書き表はされ，常数 C' の外に第2項を伴つている．この第2項を補正項と見なすことゝする．今 C_n'，C_{n+1}' を用いて $x_n^{(1)}$，$x_{n+1}^{(1)}$ を計算すると，C の第1次補正量 $\Delta C_n^{(1)}$，$\Delta C_{n+1}^{(1)}$ は次式で與えられる．（証明略）．

$$\left.\begin{aligned} \Delta C_n^{(1)} &= \frac{1}{D'}(r_n\beta_{n+1}x_n^{(1)} - \mu_n' x_{n+1}^{(1)}) \\ \Delta C_{n+1}^{(1)} &= \frac{1}{D'}(-\mu_n\beta_n x_n^{(1)} + r_n\beta_n x_{n+1}^{(1)}) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

こゝに $D'=1-r_n\beta_n\cdot\beta_{n+1}$ にして β_n は前の組の x_n の係数，すなわち式(1)の第3式，C_3 の係数 $\frac{1-r}{D}$，であり，β_{n+1} は後の組の x_{n+1} の係数すなわち式(1)の第1式，C_1 の係数 $\frac{1-r_2}{D}$ である．

ΔC_n，ΔC_{n+1} がわかれば，これに式(1)の係数をかけて Δx の値は直ちに得られる．実例によつて説明することにする．

§.4. 計算例．

次の6元式を例とする．

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	C
53.8	−10.9					3569.6
−10.9	65.6	−16.1				2096.2
	−16.1	126.8	−16.1			3054.3
		−16.1	120.1	−19.9		1371.2
			−19.9	310.4	−19.9	1697.2
				−19.9	347.4	340.6

Bleich「鉄骨構造上巻」(コロナ社刊 P396 の例題)

仕切りの線で区切り、2組の3項式に分ち対角線項を1として次の様に書き直す。

第1組

x_1	x_2	x_3	C
1	−0.2026		66.349
−0.1662	1	−0.2454	31.955
	−0.1270	1	$24.088+0.1270x_4$

第2組

x_4	x_5	x_6	C
1	−0.1657		$11.417+0.1341x_3$
−0.0641	1	−0.0641	5.469
	−0.0573	1	0.980

計算はすべて同上で、機械的に実行する仕組みとした.(別表参照)すなわち左から順次 x_1, x_2, x_3 ----- に関する数値を上から下に記入する.

A, B, C の行は準備計算の部分で C行の数字は上から順に、C_1, C_2, C_3--- の係数である. B行には常数項が記入される. そのうち組の区切り目に当る C_3, C_4 は C_3', C_4' を記し、これに附随する補正項はこれを上方に抽出して、G. H. 欄で計算する. すなわち式(2)を用いて. $\Delta C_3, \Delta C_4$ の x の係数を計算すると. A行に記した、

$$r\beta_3\beta_4 = 0.01703\times1.0333\times1.0108 = 0.01778 \quad \frac{1}{D'} = 1.01810$$

を用いて $\frac{1}{D'}\times r\beta_4 = 1.01810\times0.01721 = 0.01752$, $\frac{1}{D'}\times\mu_3' = 1.01810\times0.1270 = 0.1293$

故に $\Delta C_3 = 0.01752\times x_3 + 0.1293\times x_4$ を得る. ΔC_4 の式についても同様.

準備が終ったら、次の様にして計算をすゝめる.

(1). C行各段の数字に、B行に記入した C_1, C_2, C_3', C_4' ---- をかけた値

G			H		
$0.01752 x_3 + 0.1293 x_4$		ΔC_3	$0.1365 x_3 + 0.01792 x_4$		ΔC_4
0.538	1.612	2.150	4.194	0.224	4.418

$\frac{1}{D} = 1.0693$ $\mu_1 \mu_2 = 0.02111$ $\mu_1' \mu_2' = 0.04972$

$\frac{1}{D} = 1.0145$ $\mu_1 \mu_2 = 0.00367$ $\mu_1' \mu_2' = 0.01062$

A	μ μ'	−0.1662 −0.2026 0.00337	−0.1270 −0.2454 0.03120		−0.1341 −0.1270 0.01703 $r\beta_3\beta_4$ 0.01778			
		x_1	x_2	x_3	$r\beta_4 = 0.01121$ $r\beta_3 = 0.01760$	x_4	x_5	x_6
B		66.349	31.955	24.088		11.417	5.469	0.980
C	式(1)の係数	1.0360 0.2166 0.0532	0.1777 1.0693 0.2624	0.0226 0.1358 1.0333		1.0108 0.1681 0.0108	0.0650 1.0145 0.0650	0.0037 0.0581 1.0037
D	第1近似値	68.738 6.921 1.282 76.941	11.790 34.169 6.321 52.280	1.449 4.339 24.890 30.728		11.540 0.919 0.011 12.470	0.742 5.548 0.064 6.354	0.042 0.318 0.984 1.344
E	1次補正	0.114	0.564	2.222		4.466	0.287	0.016
F	総和(D+E)	77.055	52.844	32.950		16.936	6.641	1.360

をD行に記入して総計する．例えば

$$66.349\times1.0360=68.738$$
$$31.955\times0.2166=6.921$$
$$24.088\times0.0532=1.282$$
$$x_1^{(1)}=76.941$$

(2). $x_3^{(1)}=30.728$, $x_4^{(1)}=12.470$ を用いて G, H 欄で ΔC_3, ΔC_4 を計算する，例えば

$$\Delta C_3=0.01752\times30.729+0.1293\times12.470=0.538+1.612=2150$$

(3) 次に ΔC_3 を第1組C行第3段（C_3の係数）にかけて Δx_1, Δx_2, Δx_3, Δx_4 を第2組，C行第1段（C_1の係数）にかけて Δx_4, Δx_5, Δx_6 を計算する．E行の値がそれである．

(4). 本例では区切り目が一つ，したがって補正計算は上記の1次補正で終了し，$x^{(1)}$とΔxを加えて所要の解を得るのである．

若し未知数がもっと多い場合には $\Delta C_3^{(1)}$ $\Delta C_4^{(1)}$ より求めた $\Delta x_4^{(1)}$ により，さらに $\Delta C_3^{(2)}$, $\Delta C_4^{(2)}$ を計算しxの第2次補正量 $\Delta x^{(2)}$ を算定する．

以下同様の計算をくり返すと，逐次補正値は小さくなり，xの所要末位に影響しなくなる．そこで計算を打切って$x^{(1)}$にこれら補正値を加えることにより目的の解を得る．

§.5. 結び

例題で見られる様に，本法によれば6元3項式までの多元式は，第1次の補正で所要の解が得られ6元以上の多元連立3項式も第2次補正値で急速に目的の解に収斂する．算法は現行法よりも簡明で，すべて機械的に進められるので理解も容易であると思う．

著者は更に進んで3項式と限らずもっと一般なる型式の多元連立式に本法を有効に応用すべく研究中である．