周波数応答関数によるNewmark β 法の時間刻みによる誤差評価

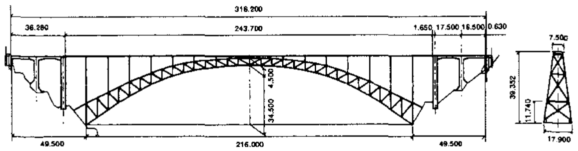
長崎大学大学院　学生会員　○平　貴子　　長崎大学工学部　フェロー　岡林　隆敏
長崎大学工学部　正会員　　呉　慶雄　　長崎大学大学院　学生会員　木村　啓作

1．はじめに

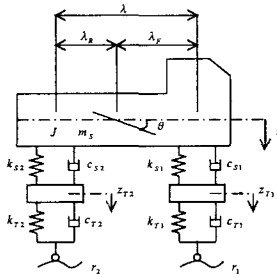
構造物の振動応答シミュレーションを行う場合，Newmark β 法が一般的に用いられるが，時間刻みの設定により応答値が変化し，高次振動成分に誤差が生じることがある．本研究では，長崎県に架設されている西海橋を対象橋梁とし，連続系における周波数応答関数と，Newmark β 法により離散化された場合の周波数応答関数を求め，西海橋とその橋梁に車両が走行する場合[1]の周波数応答関数を計算し，両者の共振曲線を比較することにより，時間刻み⊿t の変化による影響について評価した．

2．対象橋梁と走行車両の諸元

図－1 に対象橋梁として用いる西海橋の一般図を，図－2 に車両の 4 自由度系モデルを，表－1 に車両諸元を示す．



図－1　西海橋一般図（単位：m）



図－2　4自由度車両モデル

表－1　車両諸元

総重量(kN)	196.00
ばね上 ばね定数前輪 K_{S1}(kN/m)	1176.00
ばね上 ばね定数後輪 K_{S2}(kN/m)	4704.00
ばね上 減衰係数前輪 C_{S1}(kN·s/m)	4.90
ばね上 減衰係数後輪 C_{S2}(kN·s/m)	19.60
ばね下 ばね定数前輪 K_{T1}(kN/m)	2352.00
ばね下 ばね定数後輪 K_{T2}(kN/m)	9408.00
ばね下 減衰係数前輪 C_{T1}(kN·s/m)	5.88
ばね下 減衰係数後輪 C_{T2}(kN·s/m)	23.52

3．周波数応答関数

(Ⅰ)連続系による周波数応答関数

連続系で記述された運動方程式は，次式で表される．

$$\boldsymbol{M}\ddot{y}(t)+\boldsymbol{C}\dot{y}(t)+\boldsymbol{K}y(t)=\boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

(1)式の両辺をラプラス変換し，連続系の周波数応答関数を求めると，次式となる．ここで，$s=i\omega$ である．

$$\boldsymbol{H}(i\omega)=(-\boldsymbol{M}\omega^2+i\omega\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K})^{-1} \tag{2}$$

(Ⅱ)Newmark β 法による周波数応答関数

Newmark β 法による変位，速度，加速度は次式で表される．

$$y_{n+1}=y_n+\dot{y}_n h+(1/2-\beta)\ddot{y}_n h^2+\beta\ddot{y}_{n+1}h^2 \tag{3}$$

$$\dot{y}_{n+1}=\dot{y}_n+(\ddot{y}_n+\ddot{y}_{n+1})h/2 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_{n+1}&=(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{C}h/2+\beta\boldsymbol{K}h^2)^{-1}\\&[-\boldsymbol{K}y_n-(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}h)\dot{y}_n-\{\boldsymbol{C}h/2+\boldsymbol{K}(1/2-\beta)h^2\}\ddot{y}_n+\boldsymbol{f}_{n+1}]\end{aligned} \tag{5}$$

この式を用いて，y_{n+1} と $\dot{y}_{n+1}$ を y_n，$\dot{y}_n$，$\ddot{y}_n$ で表し，ベクトル表示すると次式が得られる．

$$\mathbf{Y}_{n+1}=\mathbf{A}\mathbf{Y}_n+\mathbf{B}\mathbf{f}_{n+1} \tag{6}$$

ただし，$\boldsymbol{Y}_n=[y_n\ \ \dot{y}_n\ \ \ddot{y}_n]^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{A}$ は応答についての係数マトリクス，$\mathbf{B}$ は外力についての係数マトリクスである．時間進み演算子を Z とすると，$\mathbf{Y}_{n+1}=Z\mathbf{Y}_n$ と表されるので，(6)式に代入し，まとめると次式を得る．

$$\mathbf{Y}_n=(Z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{f}_{n+1} \tag{7}$$

(7)式の外力 f_{n+1} の係数が周波数応答関数であり $\boldsymbol{H(Z)=(ZI-A)^{-1}B}$ となり，$Z=e^{i\omega h}$ とおくと次式が得られる．

$$\boldsymbol{H}(i\omega)=(e^{i\omega h}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{8}$$

4．車両が走行する橋梁の周波数応答関数

車両が走行中である橋梁の運動方程式は次式で表される．ここに $b(t)$ は車両設置位置を表すベクトルである．

$$\boldsymbol{M}\ddot{y}(t)+\boldsymbol{C}\dot{y}(t)+\boldsymbol{K}y(t)=\boldsymbol{F}(t)=-\boldsymbol{b}(t)\boldsymbol{F}_v(t) \tag{9}$$

次に，橋梁上を走行する４自由度車両の運動方程式は次式で表される．

$$M_v\ddot{z}(t)+C_v\dot{z}(t)+K_vz(t)=F_v(t) \tag{10}$$

（9），(10)式を合成すると次のようになる．

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M_s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} C+bb^TC_s & -bC_s \\ -b^TC_s & C_v \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} K+bb^TK_s & -bK_s \\ -b^TK_s & K_v \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} -bK_s & -bC_s \\ K_s & C_v \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} r \\ \dot{r} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

(11)式をベクトル表示すると，次式となる．ここに，$r(t)$は，$r(t)$と$\dot{r}(t)$から構成されるベクトルである．

$$M_X\ddot{X}(t)+C_X\dot{X}(t)+K_XX(t)=F_Xr(t) \tag{12}$$

(12)式を Newmark β 法により(７)式と同様に表すと，次式のようになる．

$$\mathbf{Y}_n=(Z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{BF}_X\mathbf{r}(t) \tag{13}$$

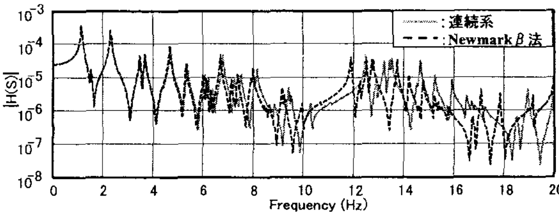
３の(Ⅱ)の場合と同様に時間進み演算子Zを用い，$Z=e^{i\omega h}$とすると，次式が得られる．

$$H(i\omega)=(e^{i\omega h}I-A)^{-1}BF_X \tag{14}$$

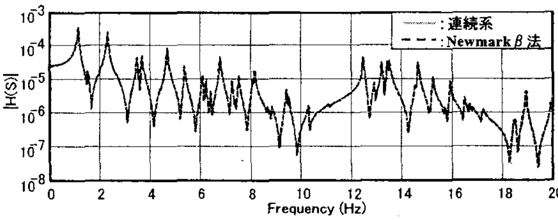
５．数値計算結果と考察

(Ⅰ)連続系と Newmark β 法の周波数応答関数

図－３は連続系とNewmark β 法による周波数応答関数である．図－３ a)に Newmark β 法の時間刻みを⊿t=0.01(sec)とした場合を，また図－３ b）に⊿t=0.001(sec)とした場合を示す．実線は連続系を，破線は Newmark β 法を表している．⊿t=0.01(sec)の場合，８Hz 付近までは良い一致が見られるが，それ以降の高周波数領域では，Newmark β 法を用いると周波数の低い方にずれが拡大していることが分かる．それに対して，⊿t=0.001(sec)の場合，20Hz でも良い一致を示している．以上より，時間刻みを大きくすると高周波数領域で誤差が拡大することが分かる．



a) ⊿t＝0.01

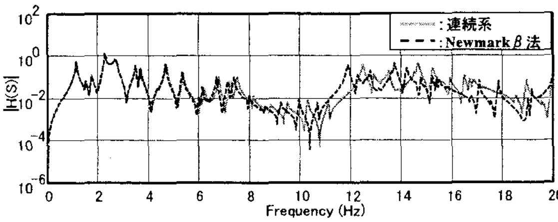


b) ⊿t＝0.001

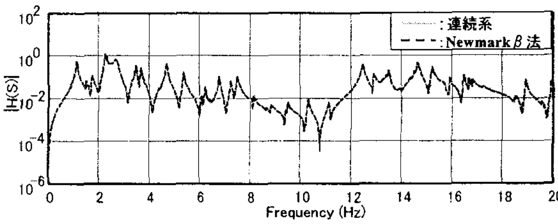
図－３　周波数応答関数

(Ⅱ)車両走行がある場合の周波数応答関数

走行車両がある場合の連続系とNewmark β 法による周波数応答関数を図－４に示す．車両がない場合と同様に，時間刻みを⊿t=0.01(sec)および⊿t=0.001(sec)として両者を比較した．走行車両がない時と比較すると，車両の振動数が発生している事がわかる．この場合でも，時間刻みを大きくすると，共振振動数が低い領域に移動することが分かる．



a) ⊿t＝0.01



b) ⊿t＝0.001

図－４　車両走行がある場合の周波数応答関数

６．まとめ

Newmark β 法において時間刻みを大きくすると，振動数が高くなるに従い連続系よりも低い結果が得られる傾向にある．Newmark β 法では，高次の振動数を得るためには適切な時間刻みを考慮する必要がある．

[参考文献] 1)岡林，岡谷，呉：路面凹凸のモデル化と不規則振動による道路橋交通振動加速度応答解析，構造工学論文集 Vol.47A,pp411-418,2001.3