

回転自由度を有する立体要素のシェル構造物への適用

琉球大学 学生会員 松原 仁・琉球大学 正会員 伊良波 繁雄
琉球大学 正会員 富山 潤・琉球大学 学生会員 神田 康行

1. はじめに

有限要素を高精度化する手法の一つに要素を各節点の自由度に回転自由度を加える手法がある。筆者らは関口、菊池が開発した回転自由度を有する平面要素¹⁾を三次元に拡張し、回転自由度を有する四面体要素を開発した。この要素は三次元領域でも高精度な解を得ることができ、特に曲げが卓越する問題に対して有効であることを示した。本研究では、新たに回転自由度を有する五面体要素及び六面体要素を定式化し、シェル構造物の解析に適用した。

2. 要素定式化

関口、菊池は平面要素の変位場に回転自由度を導入することによって要素の高精度化を行った¹⁾。関口、菊池は四辺形要素の変位場(u^{α}, v^{α})を以下のように仮定した。

$$\begin{cases} u^{\alpha} = \sum_{i=1}^4 (u_i - (y - y_i)\theta_i) N_i^{\alpha} \\ v^{\alpha} = \sum_{i=1}^4 (v_i + (x - x_i)\theta_i) N_i^{\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 Q_4 は回転自由度を有する四辺形要素、 Q_4 は一般に用いられる四節点四辺形要素を表し、 u_i, v_i はそれぞれ節点の x 方向変位、 y 方向変位、 θ_i は節点の回転角、 x, y は要素内部の座標値、 N_i^{α} は Q_4 の形状関数である。本章では(1)式を三次元領域に拡張することによって得られる回転自由度を有する五面体要素(P_5)及び六面体要素(H_6)を定式化する。

2.1 回転自由度を有する五面体要素

P_5 は通常使用される一次の五面体要素(P_5)の形状関数を利用する。 P_5 及び P_6 要素を図-1に示す。 P_6 の形状関数(N_i^{β})は次式で表される²⁾。

$$\begin{cases} N_1^{\beta} = \frac{1}{2} L_1 (1 - \zeta) \\ N_2^{\beta} = \frac{1}{2} L_2 (1 - \zeta) \\ N_3^{\beta} = \frac{1}{2} L_3 (1 - \zeta) \end{cases}, \begin{cases} N_4^{\beta} = \frac{1}{2} L_1 (1 + \zeta) \\ N_5^{\beta} = \frac{1}{2} L_2 (1 + \zeta) \\ N_6^{\beta} = \frac{1}{2} L_3 (1 + \zeta) \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 L_1, L_2, L_3 は三角形断面内での面積座標で、 ζ は五面体の上面で $\zeta=1$ 、下面で $\zeta=-1$ の値をとる座標である。よって、(1)式を三次元領域に拡張し、(2)式を適用すると、 P_5 の変位場($u^{\beta}, v^{\beta}, w^{\beta}$)は次のようになる。

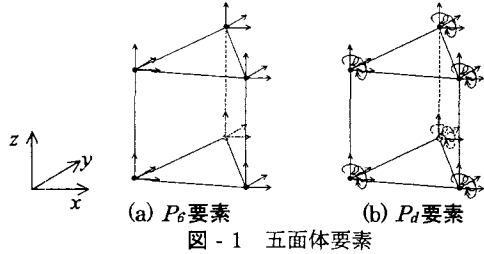


図-1 五面体要素

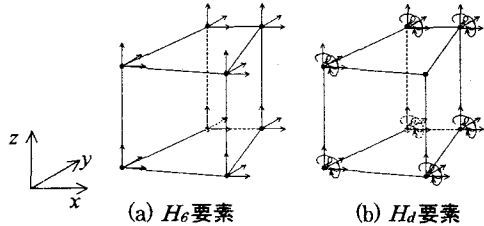


図-2 六面体要素

$$\begin{cases} u^{\beta} = \sum_{i=1}^6 (u_i + (z - z_i)\theta_z - (y - y_i)\theta_x) N_i^{\beta} \\ v^{\beta} = \sum_{i=1}^6 (v_i + (x - x_i)\theta_x - (z - z_i)\theta_z) N_i^{\beta} \\ w^{\beta} = \sum_{i=1}^6 (w_i + (y - y_i)\theta_y - (x - x_i)\theta_y) N_i^{\beta} \end{cases} \quad (3)$$

となる。ここで、 u_i, v_i, w_i はそれぞれ節点の x 方向変位、 y 方向変位及び z 方向変位であり、 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ は節点の x, y, z 軸周りの回転角、 x, y, z は要素内部の座標値である。

2.2 回転自由度を有する六面体要素

2.1節同様に、 H_8 は通常使用される一次の六面体要素(H_8)の形状関数を利用する(図-2参照)。 H_8 の形状関数(N_i^{η})は自然座標(ξ, η, ζ)を用いて次式で表される²⁾。

$$\begin{cases} N_1^{\eta} = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_2^{\eta} = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_3^{\eta} = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_4^{\eta} = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \end{cases}, \begin{cases} N_5^{\eta} = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_6^{\eta} = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_7^{\eta} = \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ N_8^{\eta} = \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{cases} \quad (4)$$

キーワード 回転自由度、五面体要素、六面体要素、シェル

連絡先 〒903-0129 沖縄県中頭郡西原町字千原1番地 琉球大学工学部環境建設工学科 TEL 098-895-8663

よって、 H_d の変位場は次式となる。

$$\begin{cases} u^{H_d} = \sum_{i=1}^8 (u_i + (z - z_i)\theta_y - (y - y_i)\theta_x) N_i^{H_d} \\ v^{H_d} = \sum_{i=1}^8 (v_i + (x - x_i)\theta_z - (z - z_i)\theta_y) N_i^{H_d} \\ w^{H_d} = \sum_{i=1}^8 (w_i + (y - y_i)\theta_x - (x - x_i)\theta_z) N_i^{H_d} \end{cases} \quad (8)$$

以上のように、関口、菊池が開発した四辺形要素は極めて簡単に三次元領域で定式化することができる。この要素の変位 - ひずみ関係式は次式となる。

$$[B] = [B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_n]$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -(z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & (y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -(z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & (y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} - (z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & (y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ (z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} & -(y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ (z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} - (y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \\ -(x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \\ -(x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} + (z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} & -(y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで、式(9)中の n は各要素の節点数を表し、五面体要素では $n=6$ 、六面体要素では $n=8$ である。

3. 精度評価（円筒形屋根シェル）

ここでは、2章で定式化した P_d と H_d を円筒形屋根シェル構造に適用し、精度評価を行う。なお、シェルの厚さ方向の要素分割は1とした。

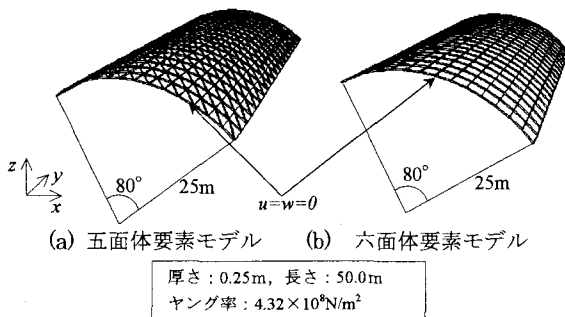


図 - 3 円筒形屋根の解析モデル

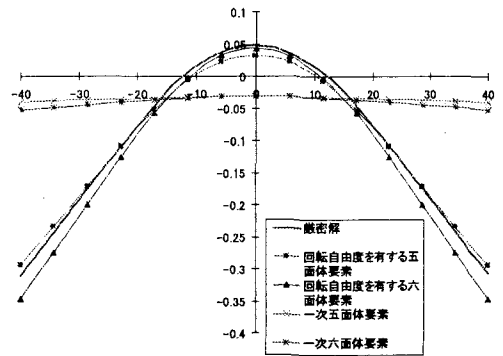


図 - 4 中央断面での z 軸方向変位

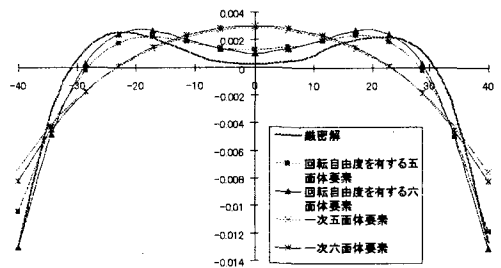


図 - 5 支持点における y 軸方向変位

ここでは、図-3に示す自重を受ける円筒形シェル屋根の解析例を示す。要素数は五面体要素で560、六面体要素で280とした。解析結果を図-4及び図-5示す。図-4及び図-5より、本要素による解は、厚さ方向の要素分割が1であるにもかかわらず、五面体と六面体の両方とも厳密解に非常に近似している。一方、一般に用いられる一次要素を用いた場合の解は厳密解とは全く異なっている。よって、本要素がシェル構造でも高精度な解を得ることが分かる。なお、シェルの厚さ方向の分割数を増加させれば、さらに高精度な解が得られると考えられる。

4. おわりに

本研究では、回転自由度を有する五面体要素と六面体要素を定式化し、シェル構造へ適用した。その結果、本立体要素がシェル構造でも高精度な解を得ることができることを示した。

参考文献

- 1) M. Sekiguchi, N. Kikuchi: Re-examination of membrane elements with drilling freedom, Proceedings of the fifth world congress on computational mechanics, 2002.
- 2) 鷲津久一郎他：有限要素法ハンドブック，培風館，pp.349-405，1993.
- 3) O.C.ツィエキーヴィッツ著，吉織雅夫，山田嘉昭訳：基礎工学におけるマトリックス有限要素法，培風館，1977.