

遷移を伴う2次元浅水流の数値解析

徳島大学工学部 正 員 岡部健士
 徳島大学大学院 学生員 山下秀基
 徳島大学大学院 学生員 〇林 雅隆

1. 概説: 2次元流況の計算手法としては、基礎方程式の記述形式やその数値解法が相違した種々のものが提案されている。しかし、河道の幾何条件が複雑で、しかも常・射流の遷移を伴う場合の計算は必ずしも容易でない。本文では、このような条件下の流れの実用的解法として、任意の斜交・曲線座標について記述されたSt.Venant方程式をMacCormackの2段階差分法により数値解析する方法に注目し、本法の適用上の諸問題ならびにその有用性を検討した結果について報告する。なお、試行計算のための現象モデルとしては、段落ちをもつ複断面水路の流れをとりあげる。

2. 基礎式: 直交直線座標 (x, y) における2次元のSt.Venant方程式を、一般曲線座標 (ϕ, ψ) におけるものへ変換すると以下になる¹⁾。

$$\partial A / \partial t + \partial B / \partial \phi + \partial C / \partial \psi = D_\phi + D_\psi \quad (1)$$

ここに、 A, B, C, D_ϕ および D_ψ は従属変数のベクトルで以下のように定義される。

$$A = \begin{bmatrix} h/J \\ u^* h/J \\ u' h/J \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \left[\left(u^* u^* h + \frac{\phi_x}{2} g h^2 \right) - \epsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \psi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \psi} \right) \right\} \right] \\ \frac{1}{J} \left[\left(u^* u' h + \frac{\phi_y}{2} g h^2 \right) - \epsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u' h)}{\partial \phi} + \phi_x \frac{\partial(u' h)}{\partial \psi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u' h)}{\partial \phi} + \phi_y \frac{\partial(u' h)}{\partial \psi} \right) \right\} \right] \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{J} \left[\left(u' u^* h + \frac{\phi_x}{2} g h^2 \right) - \epsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_x \frac{\partial(u^* h)}{\partial \psi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \phi} + \phi_y \frac{\partial(u^* h)}{\partial \psi} \right) \right\} \right] \\ \frac{1}{J} \left[\left(u^* u' h + \frac{\phi_y}{2} g h^2 \right) - \epsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u' h)}{\partial \phi} + \phi_x \frac{\partial(u' h)}{\partial \psi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u' h)}{\partial \phi} + \phi_y \frac{\partial(u' h)}{\partial \psi} \right) \right\} \right] \end{bmatrix}$$

$$D_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \cdot gh(SX_{0\phi} - SX_{1\phi}) \\ 1/J \cdot gh(SY_{0\phi} - SY_{1\phi}) \end{bmatrix} \quad D_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \cdot gh(SX_{0\psi} - SX_{1\psi}) \\ 1/J \cdot gh(SY_{0\psi} - SY_{1\psi}) \end{bmatrix}$$

ただし、 J は座標変換のヤコビアン $J = \phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x$ である。また、 u^* , u' , u^* および u^* はそれぞれ x , y , ϕ および ψ 方向の水深平均流速、 h は水深、 g は重力加速度、 ϵ は渦動粘性係数、 $S_{0\phi}$ および $S_{0\psi}$ はそれぞれ ϕ および ψ 方向の河床勾配、 $S_{1\phi}$ および $S_{1\psi}$ はそれぞれ ϕ および ψ 方向の河床摩擦勾配であり、Manning式などから評価される。

3. 数値解法: 基礎式の数値解析では、まずphase split(相分割)により空間について2次元の方程式を1次元の方程式に分割し、つぎにそれぞれをMacCormackの予測子(predictor)・修正子(corrector)法で解く。すなわち、 n 時間ステップ経過後に得られた空間格子点 (i, j) の解 $A^n(i, j)$ より、次式により $(n+1)$ ステップの解 $A^{n+1}(i, j)$ を求める。

$$A_{n+1}(i, j) = [L_\phi(\Delta t_\phi)]^m [L_\psi(\Delta t_\psi)]^l [L_\phi(\Delta t_\phi)]^m [L_\psi(\Delta t_\psi)]^l A_n(i, j) \quad (2)$$

ここに、 L_ϕ および L_ψ はそれぞれ ϕ および ψ 方向の微分演算子、 Δt_ϕ および Δt_ψ はそれぞれ ϕ および ψ 方向の時間ステップ、 m および l は整数で、 $m \neq l$ である。また、基礎式の離散化や計算上の打ち切り誤差に起因する数値振動を除去するための人工粘性には、拡散型²⁾を用いた。

4. 試行計算例ならびに考察: 試行計算の対象とした水路は図-1に示すように、45度の斜め段落ち部を

有する複断面水路である。計算にあたっての与条件は表-1に示すとおりである。計算ではまず、十分に堰上げられた静水状態を初期条件とした。ついで、上流端の流量を初期値の $0 \text{ m}^3/\text{sec}$ から3分程度で目標値まで増加させて、その後は一定に保ち、一方、下流端では流量が目標値に達するまでは、初期の水位を維持したのち表中の値まで降下させ、その後は固定するという境界条件のもとで、流れが定常状態に達するまで流況の追跡計算を行った。側壁の境界上では、 $u^* = 0$ とし、スリップ条件を設定した。また、時間ステップ Δt_0 および Δt_1 は、いわゆる CFL 条件が全点において満たされるように決定した。このようにして行った計算の平面流況、フルード数の縦断分布および水位の縦断分布の計算結果を図-1に示す。

フルード数および水位の縦断分布の図からわかるように、流れは支配断面および跳水を伴い、流下方向に対して斜めに設定された段落ち部ではかなり複雑な流れとなっているが、これらのような場合においても十分に安定した解が得られている。また、段落ち部が左岸側から始まるために、流れが左岸側に集まり、右岸側の、特に高水敷で流速が減少するなど、現象の特徴がよく表されている。しかし、図-2からわかるように、高水敷と低水路の境界付近で数値振動が生じた。これには、横断方向の計算メッシュを、特に高水敷と低水路の境界付近で細かく設定すればよいのではないかと考えられる。

【参考文献】

- 1) 清水康行・山下恭正・山下彰司・宗田徳彦：一般曲線座標系を用いた常・射流混在流れの計算，平成2年度「河川に関する調査・試験・研究報告書」，北海道開発局開発土木研究所，pp.93-108，1992。
- 2) 岡部健士・高橋邦治・穴瀬康雄：MC法を用いた1次元開水路流れの数値計算法，徳島大学工学部研究報告，第38号，pp.25-33，1993。

表-1 計算条件

流入流量	10.0 (l/s)
下流端水位	0.06 (m)
粗度系数 n	0.025
$\Delta \psi$	0.50
$\Delta \phi$	0.10
クーラン数 K	0.75
カルマン定数	0.4
K_v	10.0

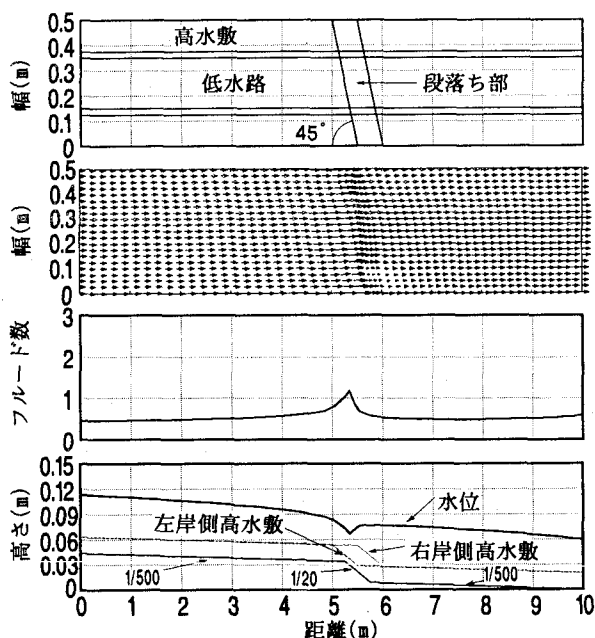


図-1 複断面水路の平面図，平面流況図
フルード数分布図および水位縦断図

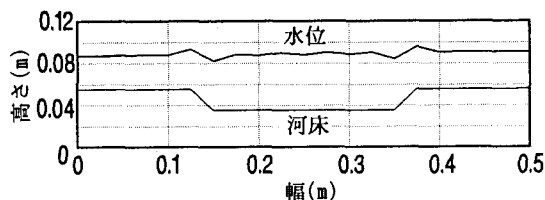


図-2 水位横断図