

カルマン・フィルタを用いた条件付き確率場のシミュレーションに関する研究

建設省中国地方建設局 正員○中野 崇

山口大学 工学部 正員 清野 純史

山口大学 工学部 正員 三浦 房紀

1. まえがき 地震動は時間的、空間的に変動する。構造物を設計するとき、その構造物が地震動の空間的な変動を考慮しなくて良いと考えられる場合には、過去の代表的な強震記録波を入力地震動として耐震設計されることが多い。しかし、長大構造物のようにその展開距離が地震波の波長に対して長い場合には、その構造物に沿った複数の地点における波形が必要である。本研究では、波形の空間分布を確率場として表現し、カルマン・フィルタとクリッキングのハイブリッド法により、確率場が与えられている場合の未測定点の条件付きシミュレーションを行った。

2. 観測波形 本研究で用いる観測波形には、次式の確率微分方程式を用いた。

$$\dot{x} = a \cdot x + b \cdot \gamma \quad (1)$$

ここで、 x は白色雑音 γ によってドライブされる状態変数、 a 、 b は確率場を支配するパラメータである。(1)式の解は次式で与えられる。

$$x_k = \left(1 + a \cdot \Delta t + a^2 \frac{\Delta t^2}{2!}\right) \cdot x_{k-1} + b \cdot \gamma_{k-1} \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (2)$$

観測波形には、白色雑音を入力として上式により算出した応答波形に、2乗平均値の10%の白色雑音を付加して用いた。

3. 確率場の推定 本研究では測定点数2、未測定点数2とし、測定点の関係は、地点間距離200(m)で、波形の伝搬速度を1000(m/sec)とした。また入力波形の継続時間は5.16(sec)、 Δt は0.02(sec)とした。まず、確率場の推定の可能性を見るために、拡張カルマン・フィルタを用いて、観測波形と入力波形から確率場を支配するパラメータ同定を行った。

同定するパラメータを組み込んだ状態変数ベクトルは次式のように表される。

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (x_1, x_2, a, b)^T \quad (3)$$

拡張カルマン・フィルタに適用する遷移行列および観測行列は、次式で与えられる。

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} \phi_{11} & 0 & \phi_{13} & \phi_{14} \\ 0 & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここに、 $\phi_{11} = \phi_{22} = 1 + \Delta x_{3k/k-1}$

$$\phi_{13} = \Delta x_{1k/k-1}$$

$$\phi_{14} = \Delta \gamma_k / \sqrt{\Delta}$$

$$\phi_{23} = \Delta x_{2k/k-1}$$

$$\phi_{24} = \Delta \gamma_{k+30} / \sqrt{\Delta} \quad (\Delta: \text{時間刻み})$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

表-1 初期値

a_0	1.0×10^1
b_0	1.0×10^1
p_0	1.0×10^3
N_G	1回

表-2 同定結果

a	-2.03
b	1.99

表-1の a_0 、 b_0 は a 、 b に対する任意の初期値で、 p_0 は初期の誤差の共分散を、 N_G はグローバルな繰り返し数を示す。また表-2に同定結果を示す。これより、入出力が既知の場合は確率場を支配するパラメータの同定は可能であることが分かったが、実際問題では入力は未知の場合が多い。したがって、本研究では確率場を支配するパラメータはあらかじめ与えられているものとして解析を行った。

4. 入力波形の推定 確率場を支配するパラメータが与えられている場合には、得られた観測波形から入力を推定する必要がある。まず、(2)式の $b \cdot \gamma_{k-1} \cdot \sqrt{\Delta t}$ を、

$$h_{k-1} = b \cdot \gamma_{k-1} \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (6)$$

として (2) 式を整理すると次式を得る。

$$h_{k-1} = x_k - (1 + a \cdot \Delta t + a^2 \frac{\Delta t^2}{2!}) \cdot x_{k-1} \quad (7)$$

ここで、真値 x_k は実際には未知量であることを考慮して、カルマン・フィルタに適用する。

$$x_k = x(k/k) \quad (8)$$

$$(1 + a \cdot \Delta t + a^2 \frac{\Delta t^2}{2!}) \cdot x_{k-1} = x(k/k-1) \quad (9)$$

とおくと、(7) 式は次のように変形できる。

$$h_{k-1} = x(k/k) - x(k/k-1) \quad (10)$$

(6) 式の数値積分を行い、(10) 式と等値とすることにより γ を求めることができる。図-1 (a)、(b) に推定結果を示す。

5. 条件付き確率場のシミュレーション ここでは、測定点で得られた観測波形から未測定点の波形をシミュレーションを行う。これは、クリッキングにより波形を線形補間した後、それをカルマン・フィルタに組み込み、時々刻々求まる誤差の共分散行列 P のコレスキー分解により、確率場の特性を満たすよう補正することで実現できる。ここに、状態変数ベクトルは $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ としている。

クリッキング手法とは、未測定点 x_s の推定値を $Z^*(x_s)$ と表したとき、

$$Z^*(x_s) = m(x_s) + W^*(x_s), \quad W^*(x_s) = \sum_{i=1}^N \lambda_{is} \cdot W(x_i), \quad \lambda_{is} (1, \dots, N) : \text{重み係数} \quad (11)$$

において、真値 $W(x_s)$ と推定値 $W^*(x_s)$ との誤差の分散値を最小とする重み係数 λ_i を求める手法である。表-3 はクリッキングにより得られた重み係数である。

これを遷移行列に組み込みカルマン・フィルタに適用すると遷移行列および観測行列は次式で与えられる。

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & 0 & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & 0 & 0 & \lambda_{32} \\ 0 & 0 & 0 & a' \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以上の手順により求められた結果を図-2、図-3 に示す。

6. 結論

1. 入出力波形が既知であれば、確率場を支配するパラメータの同定が可能である。
2. 入力波形の推定に際しては、確率場を支配するパラメータが既知であれば入力波形はほぼ完全な形で推定できる。
3. カルマン・フィルタとクリッキング手法を結合させることにより、確率場の特性を満たす波形のシミュレーションが可能である。

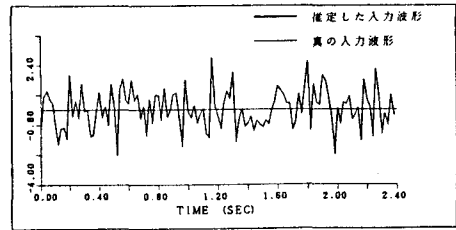


図-1 (a) 推定結果 (測点1)

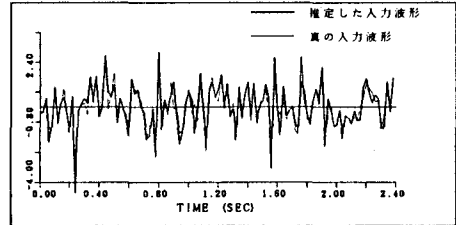


図-1 (b) 推定結果 (測点4)

表-3 重み係数 λ_{is}

s \ i	1	2
2	0.72664	0.27336
3	0.27336	0.72664

$$a' = 1 + a \cdot \Delta t + a^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} \quad (12)$$

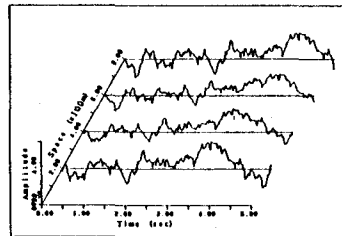


図-2 シミュレーション結果

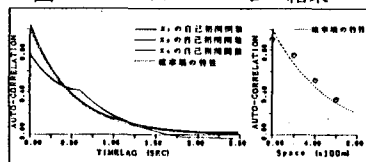


図-3 時間方向と空間方向の共分散関数