多層板の有限要素解析

山口大学工学部　　学生員　○　山本　直子
山口大学工学部　　正　員　　浜田　純夫

1．まえがき

種々の力学的特性を有する板やひび割れを含む弾塑性解析に対し、多層板の理論を用いて解析が進められてきている。これらの解析には有限要素解析が用いられているものが多く、Mindlin の仮定を用いた厚板理論が適用されているが、未知数が著しく増大するという難点を持っているのが現状である[1),2)]。また、薄板理論により解析を行っているものは、各要素を１枚板とした解析で全層にわたって一体化した理論を用いた例が多い。本研究においては、多層板の弾塑性解析にも適用できる有限要素解析の剛性行列を開発、しかも未知数が増加する難点を克服することを目的とし解析を行った。

2．仮想仕事に基づくつり合い方程式

図１のように板の中立面にｘ、ｙ軸をとり、これと直角方向をｚ軸とすると、板の任意点のひずみは薄板理論（Kirchhoffの法則）に基づけば、次式で表される。薄板理論では平面応力問題とされ、板の厚さ方向全てにわたり応力σ_z、τ_{xz}およびτ_{yz}が０と仮定されている。

$$\varepsilon_x = u_{,x} - z w_{,xx} \quad \cdots\cdots(1) \qquad \varepsilon_y = v_{,y} - z w_{,yy} \quad \cdots\cdots(2) \qquad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} - 2 z w_{,xy} \quad \cdots\cdots(3)$$

弾性体に関するフックの法則に基づけば応力は、

$$\sigma_x = \overline{E}\,(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y) \quad \cdots\cdots(4) \qquad \sigma_y = \overline{E}\,(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x) \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1-\nu}{2}\overline{E}\,\gamma_{,xy} \quad \cdots\cdots(6)$$

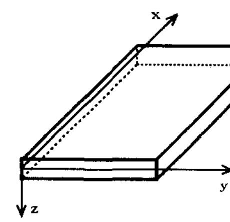

図１．平　板

ここで、$\overline{E}$ は次式の様においたものである。

$$\overline{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \cdots\cdots(7)$$

一方、未知数を増やさないために、各層の変位u_i、v_iおよびw_iを１層目の変位u_1、v_1および　w_1で次のように表すことにする。

$$u_i = u_1 - w_{,x}\overline{z_i} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$v_i = v_1 - w_{,y}\overline{z_i} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$w_i = w_1 \quad \cdots\cdots(10)$$

ただし、w　：　たわみ

$w_{,x}$　：　ｘ方向のたわみ角

$w_{,y}$　：　ｙ方向のたわみ角

$\overline{z}$　：　中央面間の距離

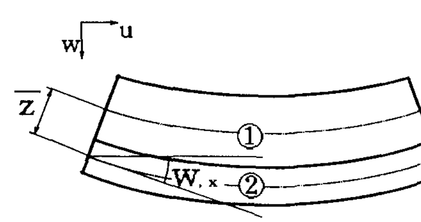

図２．２層板の仮定

多層板の内部仮想仕事δUは、ｉ層目の内部仮想仕事$\delta \overline{U_i}$ によって次のように表される。

$$\delta U = \sum \delta \overline{U_i} = \sum \int_V (\sigma_{i,x}\delta\varepsilon_{i,x} + \sigma_{i,y}\delta\varepsilon_{i,y} + \tau_{i,xy}\delta\gamma_{i,xy})\,dV \quad \cdots\cdots(11)$$

この様に、式(11)に式(1)～式(10)を代入することにより内部仮想仕事δUが求められる。

3．有限要素法の定式化

多層板の変位は、各層ごとのズレはないと仮定しているため（完全に付着していると仮定）、各層の中央面での面内、面外方向の変位は１層板の変位で表される。そこで、有限要素法を用いるために、要素内における１層板の中央面での変位を次のように仮定する。

$$w=\sum_{i=1}^{9}\{f_i(x,y)w_i+f_{xi}(x,y)w_{i,x}+f_{yi}(x,y)w_{i,y}+f_{xyi}(x,y)w_{i,xy}\} \quad \cdots(12)$$

$$u=\sum_{i=1}^{9}g_j(x,y)u_j \quad \cdots\cdots(13) \qquad v=\sum_{i=1}^{9}g_j(x,y)v_j \quad \cdots\cdots(14)$$

ここで、u、vは面内方向の中央面での変位であり、wは面外方向の変位で各層共通である。

一方、面内、面外方向の変位を表す形状関数については1次元問題で用いられるはり要素変位が2次および4次曲線でたわむと仮定したいわゆるHermit関数を用いることとし、この形状関数をx、y方向について組み合わせたものを用いた。いずれも、1要素において図3に示した9節点におけるxおよびy方向の変位u、v、たわみw、xおよびy方向のたわみ角$w_{,x}$、$w_{,y}$、およびせん断変形$w_{,xy}$、すなわち43個の自由度について次の様に設けた。

1，3，7，9 ：u v w $w_{,x}$ $w_{,y}$ $w_{,xy}$
2，8 ：u v w $w_{,y}$
4，6 ：u v w $w_{,x}$
5 ：u v w

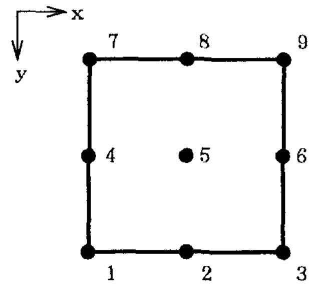

図3．板 要 素

表1．多 層 板（$10^{-3}qa^4/D$）

四辺単純支持			
分割数	1枚板	2枚板	4枚板
1×1	4.0984	3.8767	3.7675
2×2	4.0606	4.0804	4.0867
4×4	4.0633	4.0650	4.0662
理論値	4.062		
四辺固定			
分割数	1枚板	2枚板	4枚板
1×1	1.3287	0.7592	0.4946
2×2	1.2569	1.2599	1.2467
4×4	1.2653	1.2642	1.2630
理論値	1.265		

4．解析結果と考察

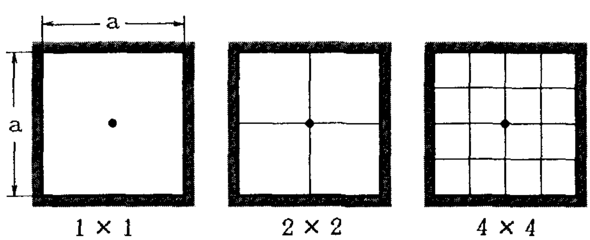

図4．要 素 分 割 方 法

図4に示すように、四角形要素で分割した四辺単純支持および四辺固定の板に等分布荷重を載荷し、その板を多層に分割した時の平板中央のたわみを解析し、理論値との比較によって形状関数の妥当性の検討を行った。表1に計算結果を示す。ここで、四辺単純支持では、たわみ角$w_{,x}=0$または$w_{,y}=0$とし、$w_{,xy}\neq 0$とした。表1に示すように、1枚板においては従来の方法に比べると2×2分割で既に近い値を示しており、さらに分割数を増やすことによって理論値に収束することが判明した。また、枚数を増加させても同様に理論値に収束しているが、誤差が幾分大きくなるのは次の理由によるものである。つまり、板の形状関数が4次式、平面の変位が2次式で変位を仮定するため、ひずみは板に関して2次、平面に関して1次となり、板の変位関数と平面の変位関数に整合性が失われることによりこれらの誤差が生じたものと思われる。

5．あとがき

本研究で得られた主な結果を示すと、以下のようになる。

1）仮想仕事の原理に基づき、キルヒホッフの仮定を取り入れることで未知数の増加を防いだ。

2）板および平面の形状関数を4次および2次式で仮定し解析を行うと、層を重ねる度に幾らか影響を受け精度が下がるが、1枚板との差はあまり生じないことから多層板の解析に十分適用できるものと思われる。

［参考文献］

1）栖原二郎：平板の曲げ理論　培風館
2）T.M.Hrudey ：A REVIEW AND CATALOGUE OF PLATE BENDING FINITE ELEMENTS