

変分原理および勾配射影法を用いたトラス構造物の最適設計法

愛媛大学工学部 正 大久保禎二 宇部興産(株) 正 ○和多田康男
西松建設(株) 正 大森 久義 愛媛大学大学院 学 田中 賢太

1. まえがき

本研究は、先に述べた論文「感度係数を用いない非線形トラス構造物の最適設計法」において定式化した最適設計問題を、勾配射影法の手法を用いて最適化する方法およびその設計例について述べるものである。

2. 変分原理に基づくトラス構造物の最適設計法の定式化

「感度係数を用いない非線形トラス構造物の最適設計法」で述べたように、変分原理に基づくトラス構造物の最適設計問題は、各部材の断面積、応力度、各可動節点変位を設計変数とし、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の非線形解析問題に関するラグランジュ関数の停留条件により導入した解析上満足すべき必要条件を等号制約条件として原最適設計問題に付加し、挙動変数に関する制約条件式と同時に考慮することにより、トラス構造物の全重量あるいは全製作費を最小化する問題として次のように定式化することができる。

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & A, \sigma, \lambda, \text{ which } \quad \text{minimize} \quad W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i \ell_i \\ \text{subject to} \quad & g_i(\sigma, \lambda) = \varepsilon_i(\sigma_i) \ell_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ji} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ & g_j(A, \sigma) = \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i - P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \\ & g_{\sigma k}(\sigma) = \sigma_k - \sigma_{sk} \leq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad g_{\lambda l}(\lambda) = \lambda_l - \lambda_{sl} \leq 0 \quad (l=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $\rho_i, \ell_i, \varepsilon_i, C_{ji}, P_j$ はそれぞれ部材 i の単位体積重量又は単位製作費、部材長、ひずみ量、各部材の軸力の可動節点変位成分 j への変換マトリックス成分、可動節点変位成分 j に作用する外力である。また $g_{\sigma k}, g_{\lambda l}$ は、それぞれ部材 k の応力度および可動節点変位成分 l の変位に関する制約条件、 σ_k, σ_{sk} はそれぞれ部材 k の実応力度および許容応力、 λ_l, λ_{sl} はそれぞれ可動節点変位成分 l の実変位および許容変位であり n は部材数、 m は自由度の数である。

3. 勾配射影法による解法

(1) 線形近似最適設計問題の導入 式(1)において A, σ, λ を独立変数として取り扱うことにより、式(1)の線形近似最適設計問題を次式のように導入する。

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & \Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda, \text{ which } \quad \text{minimize} \quad W(\Delta A) = W^0 + \sum_{i=1}^n \rho_i \Delta A_i \ell_i \\ \text{subject to} \quad & g_i(\Delta \sigma, \Delta \lambda) = g_i^0 + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_i} \ell_i \Delta \sigma_i + \sum_{j=1}^m C_{ji} \Delta \lambda_j = 0 \quad (i=1, \dots, n) \\ & g_j(\Delta A, \Delta \sigma) = g_j^0 + \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i^0 \Delta A_i + \sum_{i=1}^n C_{ji} \Delta \sigma_i A_i^0 = 0 \quad (j=1, \dots, m) \\ & g_{\sigma k}(\Delta \sigma) = g_{\sigma k}^0 + \Delta \sigma_k \leq 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad g_{\lambda l}(\Delta \lambda) = g_{\lambda l}^0 + \Delta \lambda_l \leq 0 \quad (l=1, \dots, m) \end{aligned} \quad (2)$$

なお、上式の $g_i(\Delta \sigma, \Delta \lambda)$ における $\partial \varepsilon_i / \partial \sigma_i$ は、 σ_i^0 における接線弾性係数の逆数となり、材料の応力度—ひずみ曲線の ε_0 における接線勾配の逆数として容易に求めることができる。

(2) LPによる初期許容解 $\Delta A_0, \Delta \sigma_0, \Delta \lambda_0$ の決定 上記の線形近似問題において不等号制約条件である応力度制限および変位制限についてのみスラック変数を導入したシンプレックス表を作成し、違反している制約条件がある場合にはその条件を満足し、かつ目的関数が最大に減少あるいは最小に増加するようにピボット操作を行う。この操作を全ての制約条件が満足されるまで行うことにより、初期許容解 $\Delta A_0, \Delta \sigma_0, \Delta \lambda_0$ を決定することができる。

(3) 改良値 $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$ の決定 $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$ の改良方向 d は、目的関数の最急減少勾配 $-\nabla W$ を(2)で決

定された初期許容解 $\Delta A_0, \Delta \sigma_0, \Delta \lambda_0$ におけるアクティブな制約条件群で構成される平面上に射影することにより決定される。すなわち、

$$d = -P_r \cdot \nabla W \quad (3) \quad P_r = I - A_q^T(A_q \cdot A_q^T)^{-1} A_q \quad (4)$$

ここに、 $-\nabla W = (-\rho_1 \ell_1, \dots, -\rho_n \ell_n)$ 、 P_r 、 I 、 A_q はそれぞれ射影行列、単位行列およびアクティブな制約条件群の係数行列である。また、改良方向 d に沿った $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$ の改良幅 α はアクティブでない制約条件式までの距離の最小値として次式により決定される。

$$\alpha = \min. \{ (a^i X - b^i) / a^i d \mid a^i d > 0 \} \quad (5)$$

ここに、 a^i 、 b^i はそれぞれ i 番目のアクティブでない制約条件式の係数ベクトルおよび定数項、 X は設計変数の改良値ベクトル $(\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda)$ である。したがって、設計変数 A, σ, λ の改良値 $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$ は次式で与えられる。

$$(\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda)^T = (\Delta A_0, \Delta \sigma_0, \Delta \lambda_0)^T + \alpha d \quad (6)$$

このようにして決定された A の改良値 ΔA を用いてトラス構造物の各部材の断面積を改良し、この改良解を新たな断面積の初期値として再び式(2)の線形近似最適設計問題を定式化し、 W および A が一定値に収束するまで断面積 A の改良を繰り返すことにより、最適解 W_{opt} および A_{opt} を決定することができる。

4. 最適設計例

上で述べた方法により、図-1に示す応力度一ひずみ関係を有する図-2の10部材トラスの最適設計を行った結果および「感度係数を用いない非線形トラス構造物の最適設計法」で述べたSLPを用いた方法により得られた結果との比較を表-1に示す。表-1から明らかなように、いづれの最適化手法を用いても最終的に得られた解はほぼ完全に一致しているが、最適解を得るために要した繰り返し回数は、SLPの手法を用いた場合、アクティブとなる制約条件の種類によって大きく異なっているのに対し、勾配射影法の手法を用いた場合は、いづれの場合も50程度程度の繰り返し回数で最終的な解が得られている。

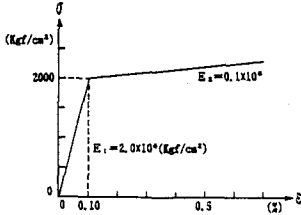


図-1 応力一ひずみ関係

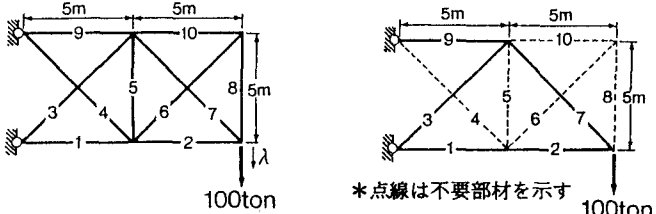


図-2 10部材トラスおよび最適解での形状

5. 結論

本研究では、「感度係数を用いない非線形トラス構造物の最適設計法」において述べた非線形トラス構造物の最適設計問題を勾配射影法の手法を用いて解く方法について述べた。今後は、より多くの数値計算例により解の収束性等の詳細な検討を行う必要があるが、本方法によっても効率的に非線形トラス構造物の最適解を決定することができることが明らかとなった。

表-1 10部材トラスの最適値

			部材 1	部材 2	部材 3	部材 7	部材 9	λ_{max} (cm)	W (kg)	ITE (回)
最適化手法			断面積 (cm^2)							
			応力度 (kgf/cm^2)							
設	$\sigma_s=3000kgf/cm^2$ $\lambda_s=3.0cm$	S L P	67.0	65.8	95.0	93.5	130.7	3.0	2103.5	168
			1507	1506	1474	1497	1522			
		勾配射影法	67.0	66.9	95.0	94.4	126.9	3.0	2097.3	53
			1508	1479	1474	1484	1568			
計	$\sigma_s=3000kgf/cm^2$ $\lambda_s=7.0cm$	S L P	49.2	47.4	65.5	67.4	97.6	7.0	1522.6	102
			2064	2079	2125	2068	2035			
		勾配射影法	50.1	50.1	65.3	66.1	97.0	7.0	1526.2	53
			2026	1966	2132	2109	2047			
条	$\sigma_s=3000kgf/cm^2$ $\lambda_s=50.0cm$	S L P	34.0	32.6	46.1	46.1	65.9	44.1	1054.7	23
			3001	3000	3001	3000	3003			
		勾配射影法	34.9	32.5	44.9	45.9	65.1	44.0	1055.7	55
			3002	3000	3000	3000	3000			

* 最適解を得るために要した繰り返し回数 初期断面積 $A^0 = 100.0 \text{ cm}^2$ 単位体積重量 $\rho = 7.85 \text{ g/cm}^3$