

感度係数を用いない非線形トラス構造物の最適設計法

愛媛大学工学部 正 大久保禎二 宇部興産(株) 正 和多田康男
西松建設(株) 正 ○大森 久義 愛媛大学大学院 学 田中 賢太

1. まえがき

本研究は、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき導入したトラス構造物の線形および非線形挙動状態における解析上満足すべき必要条件を、設計上考慮すべき制約条件群と同時に考慮した非線形トラス構造物の最適設計問題を定式化し、この最適設計問題を構造物の挙動に関する感度係数を用いないでSLPの手法により最適解を決定する方法および設計例について述べるものである。

2. エネルギー原理に基づく非線形解析問題の定式化¹⁾

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラス構造物の非線形解析法によれば、トラス構造物の各部材の応力度 σ は、各可動節点における力の釣合方程式 g_j のもとで、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(\sigma)$ を最小化するように各部材の応力度 σ を決定することにより求められる。即ち、

$$\text{find } \sigma, \text{ which minimize } \Pi_c(\sigma) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(\sigma_i) \quad (1)$$

$$\text{subject to } g_j = P_j - \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (2)$$

ここに、 A_i は部材 i の断面積、 C_{ji} は各部材の軸力の可動節点変位成分 j への変換マトリックス成分、 P_j は可動節点変位成分 j に作用する外力、 $\Pi_{ci}(\sigma_i)$ は部材 i のコンプリメンタリーエネルギーであり、 n は部材数、 m は自由度の数である。

3. 解析上の必要条件の導入

式(1)、(2)で表わされるトラス構造物の非線形解析問題において、解が満足すべき必要条件を求めるため式(1)、(2)のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(\sigma, \lambda)$ を導入する。

$$L(\sigma, \lambda) = \Pi_c(\sigma) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\sigma) \quad (3)$$

上式において、 λ_j はラグランジュ乗数であり、式(3)のラグランジュ関数 $L(\sigma, \lambda)$ の停留条件は、次式のように与えられる。

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(\sigma)}{\partial \sigma_i} = 0 \quad (4) \quad \frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_j} = -g_j(\sigma) = 0 \quad (5)$$

式(4)における $\partial \Pi_c(\sigma) / \partial \sigma_i$ 、 $\partial g_j(\sigma) / \partial \sigma_i$ の値は次式より簡単に求めることができる。

$$\frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i} \doteq \varepsilon_i(\sigma_i) A_i \ell_i \quad (6) \quad \frac{\partial g_j(\sigma)}{\partial \sigma_i} = -C_{ji} A_i \quad (7)$$

ここに、 $\varepsilon_i(\sigma_i)$ は部材 i の σ_i に対するひずみ量、 ℓ_i は部材長であり、式(6)および式(7)を式(4)、式(2)を式(5)に代入することにより次式が得られる。

$$\frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i(\sigma_i) \ell_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ji} = 0 \quad (8) \quad \frac{\partial L(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i - P_j = 0 \quad (9)$$

上式におけるラグランジュ乗数 λ_j は、可動節点変位成分 j の変位と同一の値となり、式(8)は可動節点変位および各部材の伸びの適合条件式、式(9)は可動節点変位成分における外力と軸力の釣合方程式となっている。

4. トラス構造物の最適設計問題の定式化

トラス構造物の各部材の応力度および各可動節点変位に関する制約条件に加えて、さらに3. で導入したトラス構造物の解析上満足すべき必要条件をも考慮し、トラス構造物の全重量又は全コスト W を最小化する最適設計問題を次のように定式化する。

find A, σ, λ , which minimize $W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i \ell_i$

subject to $g_i(\sigma, \lambda) = \varepsilon_i(\sigma_i) \ell_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ji} = 0, \quad g_j(A, \sigma) = \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i - P_j = 0 \quad (10)$

$g_{\sigma k}(\sigma) = \sigma_k - \sigma_{sk} \leq 0 \quad (k=1, \dots, n), \quad g_{\lambda \ell}(\lambda) = \lambda_{\ell} - \lambda_{s\ell} \leq 0 \quad (\ell=1, \dots, m)$

ここに、 ρ_i は部材 i の単位体積重量、又は単位コスト、 $g_{\sigma k}, g_{\lambda \ell}$ はそれぞれ部材 k の応力度および可動節点変位成分 ℓ の変位に関する制約条件、 σ_k, σ_{sk} はそれぞれ部材 k の実応力度および許容応力度、 $\lambda_{\ell}, \lambda_{s\ell}$ はそれぞれ可動節点変位成分 ℓ の実変位および許容変位である。

5. 逐次線形計画法(SLP)による解法

本研究では、式(10)の最適設計問題を逐次線形計画法(SLP)の手法を用いて解くこととし、 A, σ, λ の変化量 $\Delta A, \Delta \sigma, \Delta \lambda$ に関する線形近似最適設計問題を導入する。この線形近似最適設計問題のシンプレックス表は表-1に示す様になり、改良LPのアリゴリズムにより A, σ, λ の改良を繰り返すことにより、最適解 $W_{opt}, A_{opt}, \sigma_{opt}, \lambda_{opt}$ を決定した。(kgf/cm²)

表-1 シンプレックス表

		ΔA_i ($i=1, \dots, n$)	$-\Delta A_i$ ($i=1, \dots, n$)	$\Delta \sigma_i$ ($i=1, \dots, n$)	$-\Delta \sigma_i$ ($i=1, \dots, n$)	$\Delta \lambda_j$ ($j=1, \dots, m$)	$-\Delta \lambda_j$ ($j=1, \dots, m$)	S_i ($i=1, \dots, n$)	S_j ($j=1, \dots, m$)
	W	$\rho_i \ell_i$	$-\rho_i \ell_i$	0	0	0	0	0	0
COMPATIBILITY EQUATIONS	g_i^0 ($i=1, \dots, n$)	0	0	$\ell_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_i}$	$-\ell_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_i}$	C_{ji}	$-C_{ji}$	0	0
EQUILIBRIUM EQUATIONS	g_j^0 ($j=1, \dots, m$)	$C_{ji} \sigma_i^0$	$-C_{ji} \sigma_i^0$	$C_{ji} A_i^0$	$-C_{ji} A_i^0$	0	0	0	0
STRESS CONSTRAINTS	$g_{\sigma k}^0$ ($k=1, \dots, n$)	0	0	1	-1	0	0	1	0
DISPLACEMENT CONSTRAINTS	$g_{\lambda \ell}^0$ ($\ell=1, \dots, m$)	0	0	0	0	1	-1	0	1

6. 最適設計例

上で述べた方法により、図-1に示す応力度一ひずみ関係を有する図-2の10部材トラスの最小重量設計を行った結果を表-2に示す。表-2から明らかなように、 $\lambda_s = 50.0 \text{ cm}$ とした場合は応力度に関する制限のみが支配的な制約条件、 $\lambda_s = 7.0 \text{ cm}$ と制限した場合には変位の制約条件のみが支配的な制約条件となっているが、最適解において必要となる全ての部材の応力度は2035~2125kgf/cm²とそれぞれ非線形領域の応力度となっている。 λ_s をさらに厳しく制限し、 $\lambda_s = 3.0 \text{ cm}$ とした場合には、最適解において必要となる部材の応力度は全てほぼ1500kgf/cm²程度であり、材料の応力度一ひずみ関係における線形領域の値をとっている。

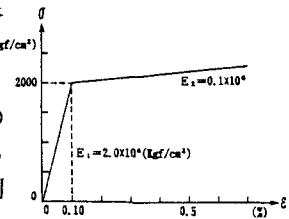


図-1 応力一ひずみ関係

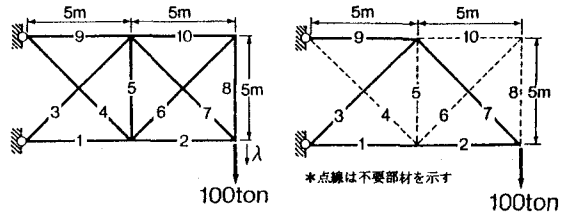


図-2 10部材トラスおよび最適解での形状

表-2 10部材トラスの最適値

設計条件	部材1	部材2	部材3	部材7	部材9	$\lambda_{\max}$ (cm)	W (kg)	ITE (四)
	断面積 (cm ²)							
	応力度 (kgf/cm ²)							
$\sigma_s = 3000 \text{ kgf/cm}^2$	67.0	65.8	95.0	93.5	130.7	3.0	2103.5	168
$\lambda_s = 3.0 \text{ cm}$	1507	1506	1474	1497	1522			
$\sigma_s = 3000 \text{ kgf/cm}^2$	49.2	47.4	65.5	67.4	97.6	7.0	1522.6	102
$\lambda_s = 7.0 \text{ cm}$	2064	2079	2125	2068	2035			
$\sigma_s = 3000 \text{ kgf/cm}^2$	34.0	32.6	46.1	46.1	65.9	44.1	1054.7	23
$\lambda_s = 50.0 \text{ cm}$	3001	3000	3001	3000	3003			

* 最適解を得るために要した繰返し回数
初期断面積 $A^* = 100.0 \text{ cm}^2$ 単位体積重量 $\rho = 7.85 \text{ gf/cm}^3$

[参考文献] 1) 大久保 他, 土・学・論, 第374号 pp.427~436.

2) 鷲津久一郎 エネルギー原理入門