弾塑性有限要素法における誤差推定の基礎的研究

鳥取大学工学部（正）　清水正喜
鳥取大学大学院（学）○山田光留

1．はじめに

弾塑性有限要素解析において応力の評価および修正は通常積分点のみで行われる．本報告では，応力の評価および修正を節点においても行い，より多くの点で構成関係および応力の釣合式を満足させるような解を求めること試みた．また，Zienkiewicz and Zhu[1)]が有限要素解析結果に含まれる誤差を推定するために導入した応力$\{\sigma^*\}$の弾塑性解析への適用性を調べた．

2．解析方法

2．1　初期応力法による弾塑性解析

初期応力法による弾塑性有限要素解析の剛性方程式は次式で与えられる．

$$[K_e]\{\triangle q\}_m=\{\triangle Q\}+\{\triangle L\}_m \qquad (1)$$

ここに，$[K_e]$:線形弾性応力ひずみ関係に基づく剛性マトリックス，$\{\triangle q\}$:節点変位増分，$\{\triangle Q\}$:外荷重増分，$\{\triangle L\}$:修正荷重，mは反復回数．反復は，$\{\triangle L\}_m=\{\triangle L\}_{m-1}$となるまで繰り返す．

式（1）の荷重修正項$\{\triangle L\}_m$を評価するためには，$\{\Delta q\}_{m-1}$から計算されるひずみに対応した，構成関係（降伏関数）を満足する応力増分$\{\Delta\sigma^{ep}\}_{m-1}$を求めなければならない．$\{\Delta\sigma^{ep}\}_{m-1}$を求める過程（リターンマッピングという）もやはり反復的に行う．

2．2　応力評価の方法

式（1）の各項の積分は，通常，数値積分によって行われるが，ガウス系の積分公式を適用する場合には，積分点は節点と一致しない．従って，積分点での応力評価は必ず行う必要があるが，節点での応力評価は必ずしも行う必要がなく，実際，行われないないのが普通であろう．

本研究では，積分点と節点において応力を計算した．また，リターンマッピングを積分点のみでなく節点においても行った，すなわち，構成関係を満足する応力を節点においても求めた．リターンマッピングを積分点のみで行った場合の結果と比較する．

2．3　Zienkiewicz and Zhu[1)]の応力$\{\sigma^*\}$

Zienkiewicz and Zhuは有限要素解に含まれた誤差を

$$\{e\}=\{\sigma^*\}-\{\hat{\sigma}\} \qquad (2)$$

から推定する方法を提案している．ここに，$\{\hat{\sigma}\}$は有限要素解，$\{\sigma^*\}$は（3）式によって評価する．

$$\{\sigma^*\}=[N\sigma]\{\bar{\sigma}^*\} \qquad (3)$$

$[N\sigma]$は，応力の内挿関数で変位内挿関数より高次である．$\{\bar{\sigma}^*\}$は，$\{\sigma^*\}$の節点値で，次式によって$\{\hat{\sigma}\}$から計算できる[2)]．

$$\{\bar{\sigma}^*\}=[A]^{-1}\int_\Omega[N\sigma]^T\{\hat{\sigma}\}d\Omega \qquad (4)$$

$$[A]=\int_\Omega[N\sigma]^T[N\sigma]d\Omega \qquad (5)$$

式（4）および（5）から明らかなように，$\{\sigma^*\}$は積分点での有限要素解を用いて計算する．ただし，式（3）で$[N\sigma]$に任意の点の座標を代入することにより任意の点の$\{\sigma^*\}$を求めることができる．

3．解析結果と考察

弾・完全塑性体地盤上に剛な帯状基礎の載荷問題を解析した．Drucker-Pragarの降伏条件と関連流れ則を仮定し，$\phi'=30°$;$c'=10(tf/m^2)$とした場合の結果を以下に示す．解析メッシュを図1に示す．15節点3角形要素を用いた．節点および積分点の配置と番号を図2に示す．

はじめに，積分点の応力経路を示す（図3，図4）．積分点の応力は，節点でリターンマッピングを行うか否かに関係しない．$\{\hat{\sigma}\}$および$\{\sigma^*\}$は，積分点において，仮定した降伏関数（構成関係）を満足していることがわかる．

節点での応力は，節点でリターンマッピングを行うか行わないかによって異なる．図5，図6は，節点でリターンマッピングを行わないときの，節点での$\{\hat{\sigma}\}$および$\{\sigma^*\}$の応力経路であり，いずれも構成関係を満足していない．図7は，節点でリターンマッピング

を行ったときの，節点の $\{\hat{\sigma}\}$ の応力経路で，構成関係を満足していることがわかる．節点での $\{\sigma^*\}$ は，先に示した図6の結果と同じである．これは，（4）式の積分を積分点で行う限り，節点でのリターンマッピングの効果が $\{\sigma^*\}$ に反映されないためである．

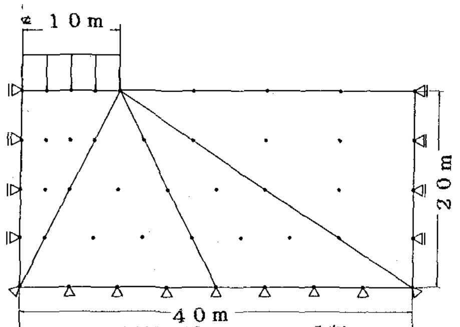

図1　解析領域とメッシュ分割

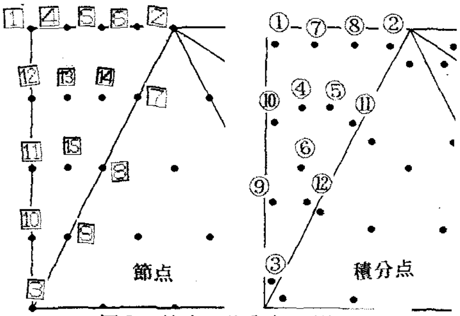

図2　節点と積分点の配置と番号

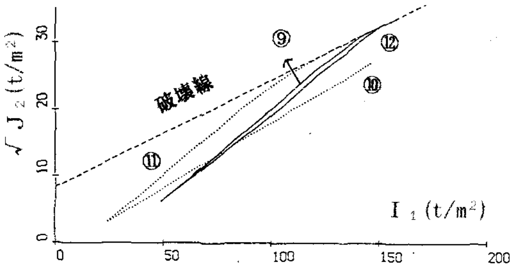

図3　要素①　積分点⑨～⑫の $\{\hat{\sigma}\}$

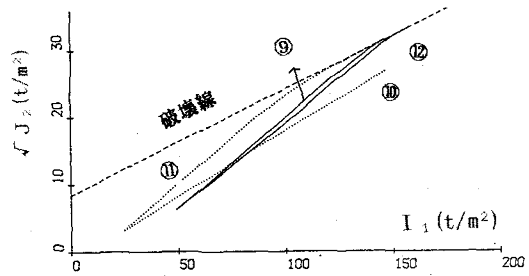

図4　要素①　積分点⑨～⑫の $\{\hat{\sigma}\}$ から求めた $\{\sigma^*\}$

4．結論

1）積分点でのみリターンマッピングを行う通常の解析手順では，節点の応力は構成関係を満足しない．

2）節点においてもリターンマッピングを行うことによって，節点の応力は構成関係を満足する．

3）Zienkiewicz and Zhu[1] によって導入された $\{\sigma^*\}$ は，節点でリターンマッピングを行っても改善されない．従って，$\{\sigma^*\}$ を用いて有限要素解の誤差を推定する方法を弾塑性解析に適用することには問題がある．

参考文献

1) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. (1987): Int. J. Numerical Methods in Engg., Vol. 24, pp. 337-357

2) 清水，山田，渡邊(1991)：土木学会中国四国支部研究発表会講演概要集，pp. 366-367

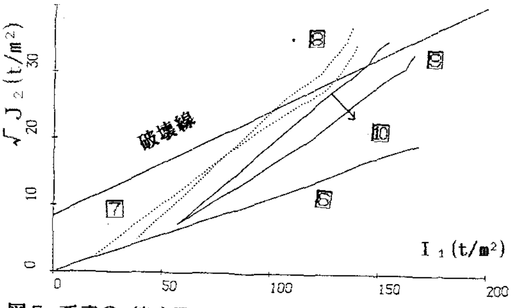

図5　要素①　節点⑤～⑩の応力修正を行っていない $\{\hat{\sigma}\}$

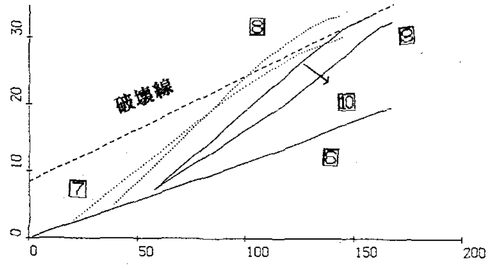

図6　要素①　節点⑤～⑩の応力修正を行っていない $\{\hat{\sigma}\}$ から求めた $\{\sigma^*\}$

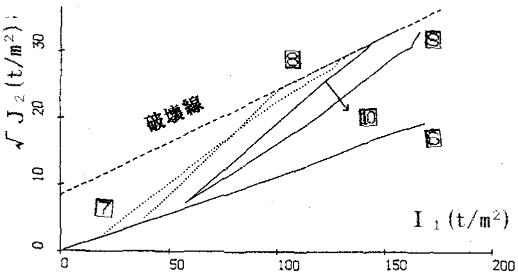

図7　要素①　節点⑤～⑩の応力修正を行った $\{\hat{\sigma}\}$