キネマティック・モデルの数値解析とその適用

広島大学工学部　正　員　常松　芳昭
広島大学大学院　学生員　S. De Costa
広島大学大学院　学生員　○　山地　克典

1．はじめに

山地水路網における不定流の系統的な数値計算手法を開発することを目的として、キネマティック・モデルの基礎式に重み付き残差法を適用して離散化を行なった。得られた4点差分式をマスキンガム式と比較するとともに、SrilankaのKaluganga川に適用して本法の適合性を検討した。

2．基礎方程式ならびに計算方法

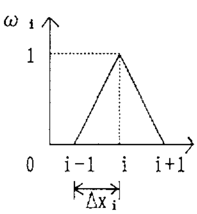
連続方程式：$\partial Q / \partial x + \partial A / \partial t = q_s$　(1)　　運動方程式：$A = kQ^P$　(2)

ここに、Q：流量，A：流水断面積，x：距離，t：時間，q_s：水路単位長さ当りの横流入量，k，P：抵抗特性を表す定数，である。

AはQの一価の関数で表されるので、式(2)を式(1)に代入し、Aを消去すると次式になる。

$\partial Q / \partial x + \lambda \cdot \partial Q / \partial t = q_s$　(3)　　$\lambda = dA/dQ = kPQ^{P-1}$　(4)

ここで、形状関数ω_i、重み関数ω_jをそれぞれ図－1、図－2のように選び、式(3)に重み付き残差法を適用すれば式(5)が得られる。

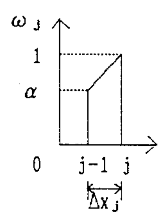


$\omega_i = (x - x_{i-1})/\Delta x_i$　$(x_{i-1} \leqq x \leqq x_i)$

$\omega_i = (x_{i+1} - x)/\Delta x_{i+1}$　$(x_i \leqq x \leqq x_{i+1})$

$\omega_i = 0$　$(x < x_{i-1},\ x_{i+1} < x)$

図－1　形状関数



$\omega = (1-\alpha)(x - x_{j-1})/\Delta x_j + \alpha$　$(x_{j-1} \leqq x \leqq x_j)$

$\omega_j = 0$　$(x < x_{j-1},\ x_j < x)$

$0 \leqq \alpha \leqq 1$

図－2　重み関数

$$S \cdot dQ/dt + T \cdot Q - \Phi = 0 \tag{5}$$

ここに、S，T，Q，Φは以下のような行列、およびベクトルである。

$$S = \begin{bmatrix} \langle\lambda\rangle_1^2(\Delta x_2/6+\alpha\Delta x_2/3) & \langle\lambda\rangle_1^2(\Delta x_2/3+\alpha\Delta x_2/6) & & \\ \ddots & \ddots & & \\ & \langle\lambda\rangle_{j-1}^{j}(\Delta x_j/6+\alpha\Delta x_j/3) & \langle\lambda\rangle_{j-1}^{j}(\Delta x_j/3+\alpha\Delta x_j/6) & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & \langle\lambda\rangle_{m-1}^{m}(\Delta x_m/6+\alpha\Delta x_m/3) & \langle\lambda\rangle_{m-1}^{m}(\Delta x_m/3+\alpha\Delta x_m/6) \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} (-1/2-\alpha/2) & (1/2+\alpha/2) & \\ & \ddots & \ddots \\ & (-1/2-\alpha/2) & (1/2+\alpha/2) \end{bmatrix},\quad \Phi = \begin{bmatrix} \langle q_s\rangle_1^2(\Delta x_2/2+\alpha\Delta x_2/2) \\ \vdots \\ \langle q_s\rangle_{m-1}^{m}(\Delta x_m/2+\alpha\Delta x_m/2) \end{bmatrix},\quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix}$$

ただし、$\langle\lambda\rangle_{j-1}^{j}$，$\langle q_s\rangle_{j-1}^{j}$はそれぞれ分割断面jとj－1の間でのλ，$q_s$の平均値を表わす。さらに、式(6)、式(7)の差分スキームを用いて式(5)を離散化すると、式(8)が得られる。

$$dQ/dt = (Q^{n+1} - Q^n)/\Delta t \tag{6}$$

$$Q = \beta Q^{n+1} + (1-\beta)Q^n \quad (\beta：空間に関する重み係数) \tag{7}$$

$$[\langle\lambda\rangle_{j-1}^{j}(\Delta x_j/\Delta t)(1/6+\alpha/3) - \beta(1/2+\alpha/2)]\,Q_{j-1}^{n+1} + [\langle\lambda\rangle_{j-1}^{j}(\Delta x_j/\Delta t)(1/3+\alpha/6) + \beta(1/2+\alpha/2)] \cdot Q_j^{n+1} = [\langle\lambda\rangle_{j-1}^{j}(\Delta x_j/\Delta t)(1/6+\alpha/3) + (1-\beta)(1/2+\alpha/2)]\,Q_{j-1}^{n} + [\langle\lambda\rangle_{j-1}^{j}(\Delta x_j/\Delta t)(1/3+\alpha/6) - (1-\beta)(1/2+\alpha/2)]\,Q_j^{n} + \langle q_s\rangle_{j-1}^{j}\Delta x_j(1/2+\alpha/2) \tag{8}$$

3．重み関数のパラメーターとマスキンガム式のパラメーターの関係

もし、式(9)のように重み関数のパラメーターαに関する式をθとおき、さらに、β=1/2とすると式(8)は式(10)のようになる。

$$\{1+\alpha/(1+\alpha)\}/3=\theta \tag{9}$$

$$Q_j^{n+1}=C_1Q_{j-1}^{n}+C_2Q_{j-1}^{n+1}+C_3Q_j^{n}+C_0\langle q_s\rangle_{j-1}^{j}\Delta x_j \tag{10}$$

ただし、$C_1=(2K\theta+\Delta t)/[2K(1-\theta)+\Delta t]$， $C_2=(-2K\theta+\Delta t)/[2K(1-\theta)+\Delta t]$

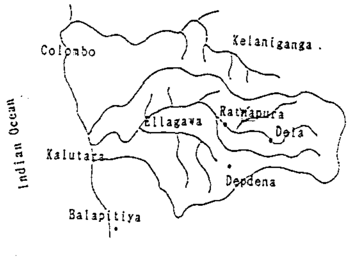
$C_3=[2K(1-\theta)-\Delta t]/[2K(1-\theta)+\Delta t]$， $C_0=(2\Delta t)/[2K(1-\theta)+\Delta t]$

$K=\Delta x_j/\langle C\rangle_j=\Delta x_j\langle\lambda\rangle_{j-1}^{j}$， $C_1+C_2+C_3=1$

式(10)は明らかにマスキンガム式と同一である。重み関数のパラメーターαは$0\leqq\alpha\leqq1$であり、この条件と式(9)からマスキンガム式のパラメーターθは$1/3\leqq\theta\leqq1/2$でなければならない。

4．SrilankaのKaluganga川に対する適用

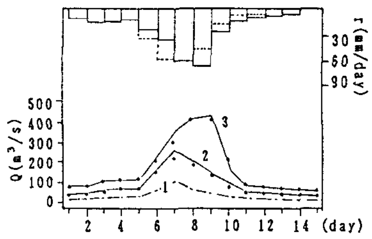
Kaluganga川は、熱帯モンスーンに属するDelaの山域を水源とし、流域面積が2,500km²あり、その流域では大規模なプランテーションが行なわれている豊かな緑地である。観測点Dela、Ratnapura、Ellagawaの位置を図－3に示す。河道の断面は三角形断面として扱い、諸条件を表－1に示す。データはこの川の1988年の降雨の最小、最大の月（それぞれ3月、5月）を用いた。RatnapuraとEllagawaにおける実測値と計算値を比較したものを図－4、図－5に示す。図より、計算値と実測値はよく適合しており、月間降雨量の変化にかかわらず年間を通して適用できることが分かった。



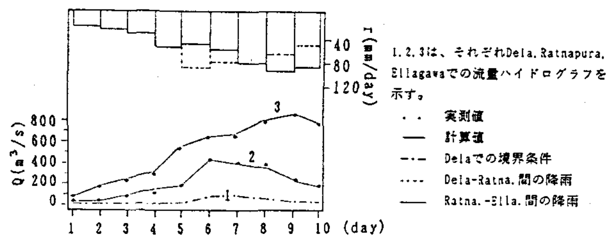
図－3　Kaluganga川と観測点の位置

表－1　流域特性

	河道長 (km)	水路勾配 (rad)	流域 (km²)	流出率		マニング係数	断面の頂角 (rad)
				3月	5月		
Dela-Ratna.	10	0.005	417.3	0.47	0.43	0.03	2.09
Ratna.-Ella.	22	0.0018	725.8	0.43	0.65	0.03	2.09



図－4　3月



図－5　5月

5．あとがき

本研究では、マスキンガム式のパラメーターθのとりうる範囲として$1/3\leqq\theta\leqq1/2$が導かれた。また、得られた山地水路における河道流の追跡計算モデルの有用性を示した。今後は水路網を対象とした追跡計算法の定式化を行なう予定である。

参考文献)S.De COSTA, Y.TSUNEMATSU, A.KANAMARU and T.MISHIMA:Numerical Analysis for Kinematic Unsteady Flows in Stream Networks of Mountainous Basin by Means of the Weighted Residual Method, Memoirs of the Faculty of Eng., Hiroshima Univ., Vol.11, No.3, 1993.