

三次元欠陥の形状決定に関する数値シミュレーション

岡山大学工学部 正員 ○ 廣瀬壮一
復建調査設計(株) 松井均

1. はじめに 構造物内の欠陥の形状を非破壊的に明らかにすることは、構造物の健全度や安全性を評価する上で重要である。本研究は、散乱波動から三次元空洞の形状を決定する逆散乱問題を数値的にシミュレーションし、超音波非破壊検査に対する定量的基礎データを提供するものである。手法としては、代表的な線形化逆解析法である Born 逆解析法と Kirchhoff 逆解析法を用いた。

2. 散乱波の積分表現 三次元等方均質弾性体 D 内に、境界 ∂D を有する空洞 D^c が存在するものとする。時間調和な弾性波が入射したときの遠方での散乱 P 波の変位成分 u_P^{far} は次のように書ける。

$$u_P^{far}(\mathbf{x}, k_P) = \frac{e^{ik_P|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|} A(\hat{\mathbf{x}}, k_P) \quad (1)$$

ただし、 k_P は P 波の波数を表し、 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ である。また、 $A(\hat{\mathbf{x}}, k_P)$ は散乱波の散乱パターンを表す関数で、次のように定義される。

$$A(\hat{\mathbf{x}}, k_P) = ik_P \kappa^{-2} \int_{\partial D} \left\{ (\kappa^2 - 2)n_k + 2\hat{x}_k n_j \hat{x}_j \right\} u_k(\mathbf{y}) e^{-ik_P \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} dS_y \quad (2)$$

ここに、 n_k は境界 ∂D 上での法線を表し、 u_k は全変位を表す。また、 $\kappa = k_S/k_P$ (k_S : S 波の波数) である。

3. Born 逆解析法 まず、特性関数 Γ とその Fourier 変換 $\bar{\Gamma}$ を次のように定義する。

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{for } \mathbf{y} \in D^c \\ 0 & \text{for } \mathbf{y} \notin D^c \end{cases} \quad (3)$$

$$\bar{\Gamma}(\mathbf{K}) = \int_{R^3} \Gamma(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{y}} dV_y \quad (4)$$

さて、Born 近似とは全変位 $\mathbf{u}$ を入射波 $\mathbf{u}^I$ で近似するものである。この近似は比較的低周波域の波動場において成立する。ここでは、入射波が

$$u_k^I(\mathbf{y}) = \hat{x}_k^I e^{ik_P \hat{\mathbf{x}}^I \cdot \mathbf{y}} \quad (5)$$

で表される平面 P 波であるとする。ただし、 $\hat{\mathbf{x}}^I$ は入射波の進行ベクトルを表す。 $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^I$ なる Born 近似を式(2)に代入して変形すると、 $\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{x}}^I$ での後方遠方場における散乱振幅 A は次のように表される。

$$\begin{aligned} A(-\hat{\mathbf{x}}^I, k_P) &= 2k_P^2 \int_{D^c} e^{2ik_P \hat{\mathbf{x}}^I \cdot \mathbf{y}} dV_y \\ &= 2k_P^2 \int_{R^3} \Gamma(\mathbf{y}) e^{2ik_P \hat{\mathbf{x}}^I \cdot \mathbf{y}} dV_y \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)と(4)を比較すると、 $\mathbf{K} = 2k_P \hat{\mathbf{x}}^I$ の条件の下で $A(-\hat{\mathbf{x}}^I, k_P)/2k_P^2$ は Γ の Fourier 変換 $\bar{\Gamma}$ と同値であることがわかる。よって、散乱振幅 A が既知であるならば、特性関数 Γ は逆 Fourier 変換により次のように求められる。

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\infty \int_\Omega A(-\hat{\mathbf{x}}^I, k_P) e^{-2ik_P \hat{\mathbf{x}}^I \cdot \mathbf{y}} d\hat{\mathbf{x}}^I dk_P \quad (7)$$

式(3)より明らかのように、 Γ は空洞の形状を表す関数であるから、上式より遠方での散乱波動から空洞の形状を決定することができる。

4. Kirchhoff 逆解析法 場における周波数が十分高いとき、空洞の境界での変位は次のように近似できる。

$$u_k(\mathbf{y}) = \begin{cases} (\hat{x}_k^I + R^P \hat{x}_k^P + R^S \hat{x}_k^S) e^{ik_P \hat{\mathbf{x}}^I \cdot \mathbf{y}}, & \mathbf{y} \in \partial D_i \\ 0, & \mathbf{y} \in \partial D_s \end{cases} \quad (8)$$

ここに、 ∂D_i と ∂D_s は境界 ∂D の内、入射波が直接照射する部分と影になる部分である。また、 R^α および $\hat{\mathbf{x}}^\alpha$ ($\alpha = P$ or S) は境界 ∂D における反射 α 波の振幅と運動方向ベクトルである。さて、式(8)を式(2)に代入して、最急降下法により積分を評価すると、 $\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{x}}^I$ なる後方遠方場での散乱振幅 A は次のようになる。

$$A(-\hat{\mathbf{x}}^I, k_P) = ik_P (1 - R^P) \int_{R^3} \gamma_H(\mathbf{y}) e^{2ik_P \hat{\mathbf{x}}^I \cdot \mathbf{y}} dV_y \quad (9)$$

ここに、 γ_H は次式で定義される特異関数である。

$$\int_{R^3} \gamma_H(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} = \int_{\partial D_i} f(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (10)$$

上式より明らかなように、特異関数 γ_H は境界 ∂D_i においてのみ特異性を示す関数である。さて、式(9)と(6)を比較すると、Kirchhoff逆解析で求めるべき関数 γ_H は、Born逆解析での逆Fourier変換式(7)を定数部分を除いて $(-ikp)$ 倍すれば求められることがわかる。これにより、散乱波動から γ_H が再構築され、欠陥の境界を直ちに認識することができる。

5. 解析例 前節までの説明で明らかなように、ここで示した逆解析では、ある周波数帯域で、あらゆる方向からの入射波に対する後方散乱振幅 A が必要である。完全な三次元空洞に対してこのような条件を満たす散乱データを数値シミュレーションによって用意するのはかなりの労力を要するので、ここでは軸対称な形状を持つ空洞に対して解析を行った。以下の解析例では対称軸を z -軸としている。なお、後方散乱振幅の計算には境界要素法を用い、 $ak_p = 0 \sim 5.77$ (a : 空洞の代表長さ)における波数域でのデータを用意した。

図1、2は、半径 a の球に対して求められたBorn逆解析による特性関数 Γ とKirchhoff逆解析による特異関数 γ_H を示している。いずれも z - r 面内($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)における分布を示している。波数を $ak_p = 0 \sim 5.77$ で打ち切っているため、打ち切り誤差による振動は見られるが、Born、Kirchhoffのいずれの場合もほぼ定義通りの関数形が再現されていることがわかる。

次に、回転体の母線が

$$\begin{aligned} r &= (a+b)\cos\theta - a\cos((a+b)\theta/a) \\ z &= (a+b)\sin\theta - a\sin((a+b)\theta/a) \end{aligned} \quad (11)$$

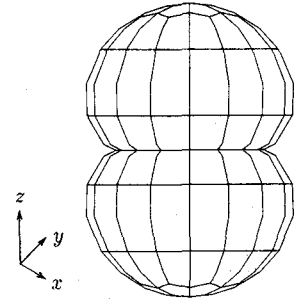


図3: くびれた空洞

で与えられるくびれた三次元空洞(図3参照)に対して同様な解析を行った。図4、5にその結果を示す。それぞれ、 z - r 面内($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)における特性関数 Γ と特異関数 γ_H の分布を示している。 $z=0$ での空洞のくびれがある程度再現されている。より良い精度で欠陥形状を再現するには、より高い波数での散乱データが必要であると考えられる。

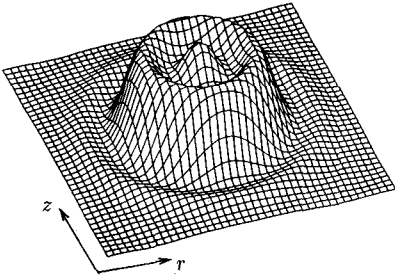


図1: 球形空洞に対して再現された Γ (Born逆解析).

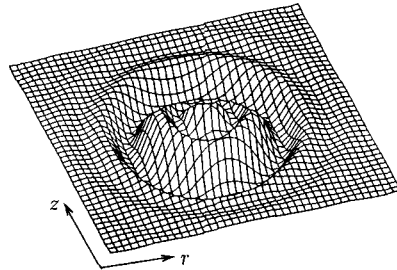


図2: 球形空洞に対して再現された γ_H (Kirchhoff逆解析).

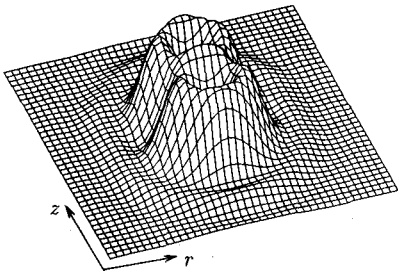


図4: くびれた空洞に対して再現された Γ (Born逆解析).

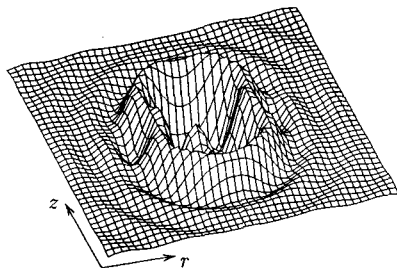


図5: くびれた空洞に対して再現された γ_H (Kirchhoff逆解析).