二次の感度係数を用いたトラス構造物の最適化アルゴリズムの比較

愛媛大学工学部　正会員　大久保禎二
愛媛大学工学部　正会員　谷脇　一弘
愛媛大学大学院　学生員 ○ 奥山　裕史

1．まえがき

近年、構造物の最適設計法の分野において、目的関数および制約条件の一次の感度係数のみならず二次の感度係数をも用いて最適化を行うことにより、効率的に最適解が得られることが報告されている。

本研究では、トラス構造物の最適設計において、二次の対角項まで考慮した２次形式の目的関数、線形近似した制約条件を用いた凸近似設計問題を導入し、この問題を双対法により解く方法について検討を行うとともに、解析式により得られた挙動の一次および二次の偏微分係数を用いて軸力·たわみの近似式を導入し、この近似式を用いて感度係数を計算し最適化を行うトラス構造物の最適設計アルゴリズムについて検討を行った結果について述べるものである。

2．２次形式の目的関数を用いた双対法

設計変数として部材断面寸法A、制約条件ｇとして応力度およびたわみを考慮し、トラス構造物の総製作費Wを最小化する最適設計問題において、Aの逆数Z（＝１／A）を新しい設計変数として考慮し、二次の偏微分係数の対角項まで考慮した２次形式の目的関数、線形近似した制約条件を用いてつぎの近似設計問題を導入する。

$$\begin{aligned}&\text{find} && Z \quad ,\ \text{which}\\ &\text{minimize} && W=W^0+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W_i}{\partial Z_i}(Z_i-Z_i^0)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 W_i}{\partial Z_i^2}(Z_i-Z_i^0)^2\\ &\text{subject to} && g_j=g_j^0(Z^0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial Z_i}(Z_i-Z_i^0)\leq 0 \qquad (j=1,\cdots,m)\end{aligned} \tag{1}$$

ここに、ｎ：部材数、ｍ：制約条件の数

上式において、$\partial^2W_i/\partial Z_i^2$は必ず正となることにより、この問題は凸の変数分離型となり、双対法により解くことができる。この近似設計問題にラグランジュ関数L（λ，Z）を導入し、設計変数Zの改良は、L（λ，Z）のZに関する最小化条件（$\partial L/\partial Z_i=0$）により(2)式により行われる。またニュートン法によるラグランジュ乗数λの改良で用いるヘッセ行列Hのｊｓ要素は(3)式により計算することができる。

$$Z_i^*=Z_i^0-\frac{\dfrac{\partial W_i}{\partial Z_i}+\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial Z_i}}{\dfrac{\partial^2 W_i}{\partial Z_i^2}} \quad (2) \qquad H_{js}=-\frac{\dfrac{\partial g_j}{\partial Z_i}\cdot\dfrac{\partial g_s}{\partial Z_i}}{\dfrac{\partial^2 W_i}{\partial Z_i^2}} \quad (3)$$

この方法では、λの改良に必要なヘッセ行列は定数となり、アクティブな制約条件式群が変化しない場合には再度計算する必要はなく、混合変数を用いた凸近似法と比較してアルゴリズムが単純となる。

3．軸力およびたわみの近似式を用いた最適設計法

構造物の最適設計においては、構造物の挙動の感度係数を計算するために多大な労力を要するため、構造物の挙動を精度よく近似し、この近似式から挙動の感度係数を計算することにより、効率的に最適解を決定することができることが考えられる。そこで、本研究では、軸力・たわみの近似式を用いて構造物の最適設計を行うアルゴリズムについても検討を行った。

構造解析により得られた軸力・たわみおよび解析的に得られた一次および二次の感度係数を用いて軸力Nは設計変数Aで近似し、たわみδは近次の精度を上げるため逆変数Zで近似することにより、軸力およびたわみの近似式$\widetilde{N}$および$\widetilde{\delta}$は次式となる。

$$\widetilde{N}_k=N_k^0+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N_k}{\partial A_i}(A_i-A_i^0)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A_i-A_i^0)\frac{\partial^2 N_k}{\partial A_i\partial A_j}(A_j-A_j^0) \tag{4}$$

$$\widetilde{\delta}_d=\delta_d^0+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \delta_d}{\partial Z_i}(Z_i-Z_i^0)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(Z_i-Z_i^0)\frac{\partial^2 \delta_d}{\partial Z_i\partial Z_j}(Z_j-Z_j^0) \tag{5}$$

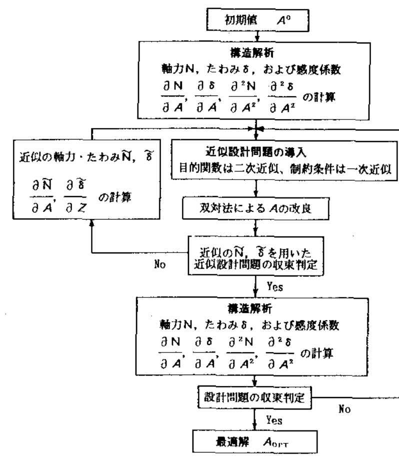
ただし、Zの改良にともない(5)式の一次および二次の項の和と一次の項のみとの計算値の符号が異なる場

合には、たわみの近似が良好に行われなくなる。そのような場合には、現在の改良解Zに最も近く、かつ一次および二次の項の和と一次の項のみの計算値の符号が同一となる改良解$\overline{Z}$を用いて(5)式をテーラー展開により線形近似した次式を用いることとした。

$$\tilde{\delta}_d=\delta_d{}^0(\overline{Z}_j)+\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial\delta_d}{\partial Z_i}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\delta_d}{\partial Z_i\partial Z_j}(\overline{Z}_j-Z_j{}^0)\right\}\cdot(Z_i-\overline{Z}_i) \qquad (6)$$

最適化過程で用いる一次の感度係数$\partial g_j/\partial Z_i$の計算は式(4)〜式(5)を用いて容易に計算することができる。また、本研究では、式(4)および式(5)において、二次の偏微分係数の対角項のみを用いた場合の最適解の精度および計算効率についても検討を行っている。

軸力およびたわみの近似式を用いた最適設計アルゴリズムのフローチャートを図−1に示す。



図−1　近似軸力・たわみを用いた最適化アルゴリズム

4．トラス構造物の最適設計例および考察

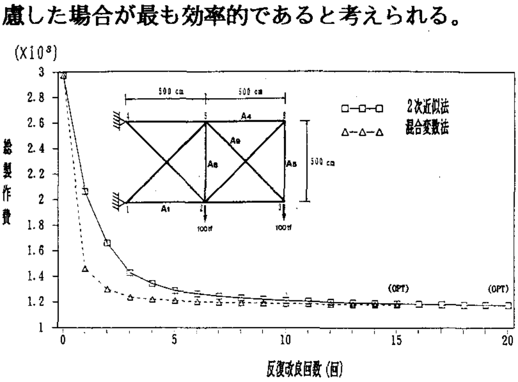
設計例として片持ち10部材トラスの許容たわみδ_aを10cm, 許容応力度σ_aを2400kgf/cm^{2}とし、最適設計を行うことにより種々のアルゴリズムの計算効率について検討を行った。

(i) 2次形式の目的関数を用いた双対法に関する検討

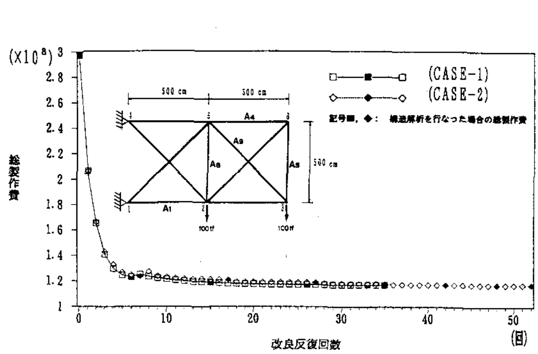
2次形式の目的関数を用いた方法(二次近似法)および混合変数を用いた凸近似による方法(混合変数法)により最適化を行い、2つの方法による総製作費の収束過程の比較を図−2に示す。混合変数法では、一回目の改良においてほぼ最適解の近傍まで達し、15回で最適解が得られているのに対し、二次近似法では、計算アルゴリズムが単純となるが、1回の反復改良における断面積の改良幅が小さく最適解を得るために20回の反復改良回数を要している。その他の計算例からも、二次近似法は、混合変数法とほぼ同一もしくはより多くの反復改良回数を必要としている。

(ii) 軸力・たわみの近似式を用いた最適設計アルゴリズムに関する検討

最適化の手法として二次近似法を用い、3.で導入した二次の感度係数の全ての要素を考慮して軸力およびたわみを近似し最適化を行った場合（CASE-1）、二次の感度係数の対角項のみを考慮して近似し最適化を行った場合（CASE-2）の近似設計問題の導入回数に対する総製作費の収束過程の比較を図−3に示す。CASE-1は、35回の近似設計問題の導入、6回の構造解析により最適解を得、CASE-2では最適解を得るために52回の近似設計問題の導入、8回の構造解析を要している。また、改良反復毎に構造解析を行う場合では、図−2から明らかなごとく20回の構造解析を要し、軸力およびたわみの近似式を用いることにより、きわめて少ない構造解析回数により最適解を決定することができる。しかし、CASE-1の1回の構造解析においては、きわめて多くの計算量が必要となり、近似の軸力・たわみに用いる二次の感度係数は対角要素のみを考慮した場合が最も効率的であると考えられる。



図−2　二次近似法と混合変数法における10部材トラスの総製作費の収束過程



図−3　CASE−1とCASE−2における10部材トラスの総製作費の収束過程