エネルギー原理およびＬＰによるトラスの重量最小化について

愛媛大学工学部　正会員　大久保禎二　宇部興産(株)　正会員　和多田康男
愛媛大学大学院　学生員　○大森　久義　愛媛大学大学院　学生員　田中　賢太
(株)熊谷組　正会員　三好　和也

１．まえがき

本論文は、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づき、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーの停留条件、応力制限、変位制限を制約条件として考慮し、改良ＬＰの手法を用いてトラス構造物の重量あるいは総コストを最小化する手法について基礎的な検討を行った結果について述べるものである。

２．コンプリメンタリーエネルギー最小化に基づくトラスの最適設計問題の定式化

２－１．トラスの最適設計問題

本研究では、トラスの各部材の応力度及び断面積を設計変数とし、各部材の応力度σ_q及び可動節点の変位u_rに関する制約条件を考慮し、目的関数としてトラスの全重量あるいは総コストを考え、最適設計問題を次式のように定義する。

$$\begin{aligned}
&\text{find} \quad \sigma,\ A,\ u \quad , \quad \text{which} \quad \text{minimize} \quad W=\sum_{i=1}^{n} \rho_i A_i l_i \\
&\text{sbject to} \quad g_{\sigma_q}(\sigma,\ A)=\sigma_q-\sigma_{qa}\leqq 0 \qquad (q=1,\dots,n) \\
&\qquad\qquad g_{u_r}(\sigma,\ A,\ u)=u_r-u_{ra}\leqq 0 \qquad (r=1,\dots,m)
\end{aligned} \tag{1}$$

ここに、A_i, l_i, ρ_iはそれぞれ部材ｉの断面積、部材長、単位体積重量あるいは単位コストを表わし、ｎは部材数、ｍは可動節点の変位の数である。またg_{σ_q}、g_{u_r}はそれぞれ部材ｑの応力度および可動節点変位成分ｒの変位に関する制約条件である。

２－２．最適設計問題の再定式化

前の論文の「エネルギー原理によるトラスの非線形感度解析」により、トラスの解析上満足すべき条件がσ，Ａ，ｕに関する等号制約条件として表わされることより、式(１)の最適設計問題を、解析上満足すべき条件をも考慮して次のように再定式化することができる。

$$\begin{aligned}
&\text{find} \quad \sigma,\ A,\ u \quad , \quad \text{which} \quad \text{minimize} \quad W=\sum_{i=1}^{n} \rho_i A_i l_i \\
&\text{subject to} \quad g_i(\sigma,\ u)=\varepsilon_i(\sigma_i)l_i-\sum_{j=1}^{m} u_j C_{ji}=0 \qquad g_j(A,\ \sigma)=\sum_{i=1}^{n} C_{ji}\sigma_i A_i-P_j=0 \\
&\qquad\qquad g_{\sigma_q}(\sigma,\ A)=\sigma_q-\sigma_a\leqq 0 \qquad g_{u_r}(\sigma,\ A,\ u)=u_r-u_{ra}\leqq 0
\end{aligned} \tag{2}$$

３．線形近似最適設計問題の導入及び最適化アルゴリズム

式(２)の最適設計問題を解く方法として種々の数理計画法の適用が考えられるが、本研究では、式(２)の最適設計問題が、力の釣合方程式を除き全てσ，Ａ，ｕの線形な方程式で構成されていることを考慮し、ＳＬＰの手法（逐次線形計画法）を用いて最適解を求めることとした。

式(２)の最適設計問題の目的関数及び制約条件をA^0, σ^0, u^0の回りでTaylor展開し、ΔA, $\Delta\sigma$, Δuに関する一次の偏微分係数の項までを考慮して近似することにより、式(２)の線形近似最適設計問題として次式を得る。

$$\begin{aligned}
&\text{find} \quad \Delta A,\ \Delta\sigma,\ \Delta u \quad , \quad \text{which} \quad \text{minimize} \quad \Delta W\ (\Delta A)=\sum_{i=1}^{n} \rho_i l_i \Delta A_i \\
&\text{subject to} \quad g_i(\Delta\sigma,\ \Delta u)=g_i^0+\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_i} l_i \Delta\sigma_i-\sum_{j=1}^{m} C_{ji}\Delta u_j=0 \\
&\qquad\qquad g_j(\Delta A,\ \Delta\sigma)=g_j^0+\sum_{i=1}^{n} C_{ji}\sigma_i^0\Delta A_i+\sum_{i=1}^{n} C_{ji}A_i^0\Delta\sigma_i=0
\end{aligned} \tag{3}$$

$$g\sigma_q(\Delta\sigma_i,\ \Delta A)=g\sigma_q^0+\Delta\sigma_i\leqq 0 \qquad gu_r(\Delta\sigma_i,\ \Delta A,\ \Delta u_j)=gu_r^0+\Delta u_j\leqq 0$$
$$\Delta A_{il}\leqq\Delta A_i\leqq\Delta A_{iu}$$

式(3)で線形近似した最適設計問題の$g\sigma_q$及びgu_rについてのみスラック変数を導入したSimplex tableauを作成し、$\Delta A, \Delta\sigma, \Delta u$についてピボット操作を行う。この場合、違反している条件がある場合には、その条件を満足し、かつ目的関数が最大に減少あるいは最小に増加するようにピボットの順位を決定している。また違反している制約条件がない場合には、それぞれの制約条件の余裕度を考慮しながら目的関数が最大に減少するようにピボット操作を行っている。このようにして、式(3)の線形近似最適設計問題を解くことにより、A, σ, uの改良値$\Delta A, \Delta\sigma, \Delta u$を決定することができ、Aを次式により改良する。

$$A^1=A^0+\Delta A \tag{4}$$

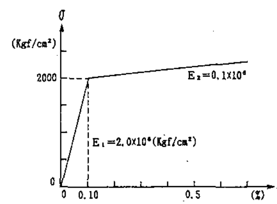
この改良解A^1を初期値として再び式(3)の近似最適設計問題を定式化し、Aの改良をW及びAが一定値に収束するまで繰り返すことにより、最適解A_{opt}を得ることができる。

5．最適設計例及び考察

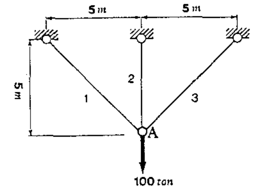
上で述べた方法により、図−1のような応力度−ひずみ関係を有する材料よりなる図−2に示す3部材トラスの最適化を行った結果を表−1に示す。目的関数としてトラスの全重量を考え $\rho_i=7.85\text{g/cm}^3$とした。またΔAのmove limitとして初期値の50%以下となる条件を考慮している。

$\sigma_a=4000\text{kg/cm}^2$、$u_a=20\text{cm}$ の制約条件のもとでは、応力制限のみが支配的な制約条件となり、不必要な部材1及び3の断面積は改良が進むに従って0に近づき、9回の改良により最適解を得ている。最適解では部材2がfully stressとなり、部材1および3の断面積はAの下限制約値と等しくなっている。

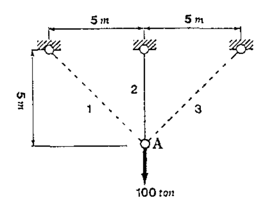
$\sigma_a=4000\text{kg/cm}^2$、$u_a=5\text{cm}$ の制約条件のもとでは、変位の制約条件が支配的な制約条件となり、最適解は11回の改良により得られている。この場合も部材2のみが必要断面積となり応力度に関しては2872.1kg/cm^2と$\sigma_a=4000\text{kg/cm}^2$に対して相当余裕のある断面となっている。また、不必要な部材1および3の断面積は下限制約値となっている。



図−1　応力度−ひずみ関係



図−2　3部材トラス



図−3　最適解での形状
点線は不要部材

6．あとがき

構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを釣合方程式のもとで最小化することによりトラスの非線形解析を行う方法を用いることにより、トラスの材料非線形最適設計問題の定式化に際して、トラスの材料非線形解析において満足すべき等号制約条件を導入することができこの等号制約条件式を設計制約条件に加えて考慮し、目的関数の最小化を行うことにより、能率的に最適解を決定することができる。このことは本研究の方法の大きな長所である。

また、トラスの材料非線形最適化問題においては、各部材の断面積のみならず応力度も設計変数として考慮することがきわめて重要なこととなる。

表−1　3部材トラスの最適値

		部材1	部材2	部材3	点Aの変位（cm）	重量（kg）	＊ITE（回）
		断面積（cm²） / 応力度（kg/cm²）					
	初期断面積	20.0	20.0	20.0			
設計条件	σ_a=4000kg/cm²	0.1	24.9	0.1	10.5	98.97	9
	u_a=20cm	2961.7	3997.5	2961.7			
	σ_a=4000kg/cm²	0.1	34.5	0.1	5.0	136.52	11
	u_a=5cm	2396.2	2888.7	2396.2			

＊　最終解を得るために要した繰り返し回数

［参考文献］1)大久保　他，土・学・論，第374号　pp.427〜436.　2)鷲津久一郎　エネルギ原理入門