

エネルギー原理によるトラスの非線形感度解析

愛媛大学工学部 正会員 大久保 禎二 宇部興産(株) 正会員 和多田 康男
 愛媛大学大学院 学生員 大森 久義 愛媛大学大学院 学生員 ○田中 賢太
 (株)熊谷組 正会員 三好 和也

1. まえがき

前の論文の「ラグランジュの未定乗数法を用いたトラスの非線形解析法」において、トラス構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを直接最小化せず、全コンプリメンタリーエネルギーの停留条件より導入した条件式を用いて解析する方法の定式化を行った。この方法においては、解析問題のラグランジュ関数の各部材の応力度およびラグランジュ乗数に関する感度係数の計算を行う必要がある。さらに非線形材料よりなるトラスの解析を行う場合は、定式化した解析問題が σ に関する非線形の連立方程式を解く問題となり、これを解くためには何らかの逐次近似の方法を用いることが必要となる。そこで、ここでは上記の感度係数の計算方法について述べるとともに、解析式の非線形連立方程式を線形近似することにより解く方法について述べるものである。

2. ラグランジュの未定乗数法を用いたトラス構造物の非線形解析法

「ラグランジュの未定乗数法を用いたトラスの非線形解析法」で述べたように、構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを最小化することによりトラスを解析する問題のラグランジュ関数は次式で表わされる。

$$L(\sigma, \lambda) = \Pi_c(\sigma) - \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j \quad (1)$$

ここに、 σ は各部材の応力度、 λ_j は釣合条件 Q_j に対するラグランジュ乗数、 m は可動節点成分の数、 n は部材数である。また、 $\Pi_c(\sigma)$ はトラスの全コンプリメンタリーエネルギーである。したがって、上式の $L(\sigma, \lambda)$ の極値が満足すべき条件は次式となる。

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial Q_j}{\partial \sigma_i} = 0 \quad (2), \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = -Q_j = 0 \quad (3)$$

3. 感度係数の計算方法

式(2)における $\partial \Pi_c / \partial \sigma_i$ は図-1より次式で求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_c}{\partial \sigma_i} &\doteq \frac{\Pi_c(\sigma_1, \dots, \sigma_i + \Delta \sigma_i, \dots, \sigma_n) - \Pi_c(\sigma)}{\Delta \sigma_i} \\ &= \varepsilon_i(\sigma_i) \cdot A_i \cdot l_i \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\varepsilon_i(\sigma_i)$ は部材 i の σ_i に対応するひずみ量である。

また、式(3)の Q_j 、即ち可動節点成分 j における釣合条件式は、次のような σ_i ($i=1, \dots, n$)に関する線形な方程式で表わされる。

$$Q_j = P_j - \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i = 0 \quad (5)$$

上式の C_{ji} は、軸力 $N_i = \sigma_i A_i$ の可動節点成分 j に対する方向余弦であり、 P_j は可動節点成分 j に作用する外力である。よって、式(2)における $\partial Q_j / \partial \sigma_i$ は次式のようになる。

$$\frac{\partial Q_j}{\partial \sigma_i} = C_{ji} \cdot A_i \quad (6)$$

4. 非線形解析問題の定式化

上記の展開により、トラスの解析上満足すべき条件(2)および(3)を次のように表わすことができる。

$$g_i(\sigma, \lambda) = \frac{\partial L}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i(\sigma_i) l_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ji} = 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

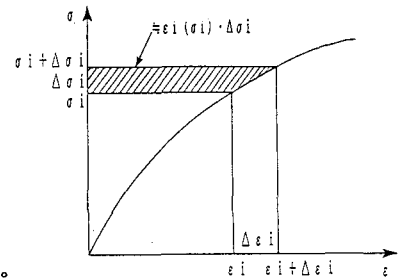


図-1 応力度-ひずみ関係

$$g_j(\sigma, \lambda) = \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n C_{ji} \sigma_i A_i - P_j = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (7)$$

ところで、式(7)で表わされる連立方程式における λ は式(1)のラグランジュ関数のKuhn-Tucker条件より次式のように表現できる。

$$\lambda_j = \frac{\nabla \Pi_0}{\nabla Q_j} = \frac{\partial \Pi_0 / \partial P_j}{\partial Q_j / \partial P_j} = \frac{\partial \Pi_0 / \partial P_j}{1} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial P_j} \quad (8)$$

Crotti-Engesserの理論³⁾より λ_j は可動節点成分 j の変位 u_j と同一の値となり、 λ を改めて u と表現することとする。また、式(8)の λ_j すなわち u_j の値は、可動節点成分 j の変位方向に仮想の ΔP_j を加えた場合のコンプリメンタリーエネルギー $\Pi_0(P + \Delta P_j)$ と原問題のコンプリメンタリーエネルギー $\Pi_0(P)$ を用いて、次式より求めることができる。

$$u_j \doteq \frac{\Pi_0(P + \Delta P_j) - \Pi_0(P)}{\Delta P_j} \quad (9)$$

5. 線形近似問題の導入

式(7)の連立方程式は、変数 σ_i の関数を含んだ関数、つまり σ の汎関数となっているため直接解くことは困難である。そこで式(7)を任意の初期値 σ^0 、 u^0 の回りでTaylor展開し、 $\Delta \sigma$ 、 Δu に関する一次の偏微分係数の項までを考慮して線形近似することにより、式(7)の近似問題として次式のような線形近似問題を導入することができる。

$$g_i(\Delta \sigma, \Delta u) = g_i^0 + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_i} \Delta \sigma_i - \sum_{j=1}^m C_{ji} \Delta u_j = 0 \quad (10)$$

$$g_j(\Delta \sigma, \Delta u) = g_j^0 + \sum_{i=1}^n C_{ji} A_i \Delta \sigma_i = 0$$

ここに、 $\partial \varepsilon_i / \partial \sigma_i$ は σ_i^0 における接線弾性係数の逆数となり、材料の応力度-ひずみ曲線より容易に求めることができる。

6. σ および u の決定

式(10)の線形近似問題を解くことにより、 σ 、 u の改良値 $\Delta \sigma$ 、 Δu を決定することができ、次式により σ 、 u を改良する。

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta \sigma \quad u^{k+1} = u^k + \Delta u \quad (11)$$

この改良解 σ^{k+1} 、 u^{k+1} を初期値として再び式(10)の線形近似問題を定式化し、 σ 、 u の改良を繰り返しながら一定値に収束させることにより、真の σ および u を決定することができる。

7. 数値計算例および考察

上で述べた方法により、図-2のような応力度-ひずみ関係を有する材料よりなる図-3、図-4に示す3部材トラスの非線形解析を行

った結果および著者らがこれまでに研究しているトラスの全コンプリメンタリーエネルギー最小化による解析方法(CEM)による結果の比較を表-1に示す。

表-1から明らかなように、本方法による解析結果とCEMによる解析結果とは完全に一致している。

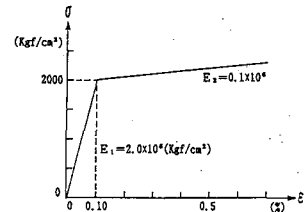


図-2 応力度-ひずみ関係

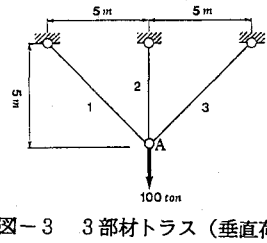


図-3 3部材トラス (垂直荷重)

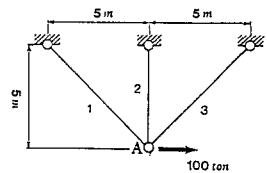


図-4 3部材トラス (水平荷重)

表-1 3部材トラスの解析例

		応力度 (kg/cm²)			変位 (cm)	
		部材 1	部材 2	部材 3	X	Y
図-3	本方法	3485.0	5071.0	3485.0	0.0	15.9
	CEM	3485.4	5070.8	3485.4	0.0	15.9
図-4	本方法	7071.0	0.0	7071.0	51.7	0.0
	CEM	7070.7	4.8	7071.4	51.7	0.0

[参考文献] 1) 大久保 他, 土・学・論, 第374号 pp.427~436 2) 鷺津久一郎, エネルギー原理入門
3) S.P.Timoshenko and J.M.Gere, Mechanics of Materials. Van Nostrand, New York (1972)