ラグランジュの未定乗数法を用いたトラスの非線形解析法

愛媛大学工学部　正会員　大久保禎二　宇部興産(株)　正会員　和多田康男
愛媛大学大学院　学生員　大森　久義　愛媛大学大学院　学生員　田中　賢太
(株)熊谷組　正会員　○三好　和也

1．まえがき

著者らは、これまでにエネルギー原理に基づき、トラス構造物の非線形解析を構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを数理計画法の手法を用いて直接最小化することにより行う方法について研究を行ってきたが、本研究では、この方法をさらに改良し、最小コンプリメンタリーエネルギーの停留条件をラグランジュの未定乗数法を用いて導入し、この条件式を連立方程式として解くことにより、非線形材料を有するトラス構造物の解析を行う方法について述べるものである。

2．コンプリメンタリーエネルギー最小化によるトラス構造物の非線形解析法の定式化

最小コンプリメンタリーエネルギーの原理に基づくトラスの非線形解析法によれば、トラスの各部材の応力度σは、各可動節点における力の釣合条件Qのもとで、構造物の全コンプリメンタリーエネルギー$\Pi_c(\sigma)$を最小化するように各部材の応力度σを決定することにより求められる。即ち、

$$\begin{array}{lll} \text{find} & \sigma \quad , \ \text{which} & \\ \text{minimize} & \Pi_c(\sigma) & (1) \\ \text{subject to} & Q_j = P_j - \sum_{i=1}^{n} C_{ji}\,\sigma_i A_i = 0 \qquad (j=1,\ldots,m) & \end{array}$$

ここに、A_iは部材iの断面積、C_{ji}は軸力$N_i=\sigma_i A_i$の可動節点成分jへの方向余弦、P_jは可動節点成分jに作用する外力、nは部材数、mは自由度の数である。

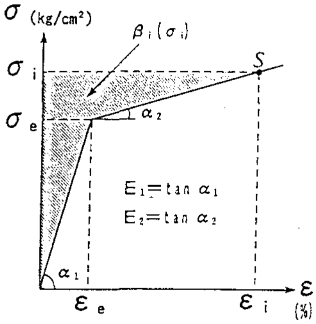
式(1)の全コンプリメンタリーエネルギー$\Pi_c(\sigma)$は、各部材のコンプリメンタリーエネルギー$\Pi_{ci}(\sigma_i)$を全ての部材について加え合わせたものであり、次式で表わされる。

$$\Pi_c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \Pi_{ci}(\sigma_i) \qquad (2)$$

上式のΠ_{ci}は、図－1の斜線部分で表わされるコンプリメンタリーエネルギー密度$\beta_i(\sigma_i)$及び部材長l_iを用いて次式より求められる。

$$\Pi_{ci}(\sigma_i) = \beta_i(\sigma_i)\cdot A_i \cdot l_i \qquad (3)$$

文献1)によれば、式(1)のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題を逐次二次計画法(SQP)の手法を用いて直接$\Pi_c(\sigma)$を最小化することにより、トラス構造物の非線形解析を極めて効率的に行うことができる。



図－1　応力度－ひずみ関係

3．ラグランジュの未定乗数法を用いた非線形解析法の定式化

ここで、式(1)の解析問題における解が満足すべき条件を求めるため、式(1)のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題のラグランジュ関数 $L(\sigma, \boldsymbol{\lambda})$ を導入する。

$$L(\sigma, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi_c(\sigma) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Q_j(\sigma) \qquad (4)$$

ここに、λ_jはQ_jに対するラグランジュ乗数である。上式の$L(\sigma, \boldsymbol{\lambda})$の極値が満足すべき条件は、$L(\sigma, \boldsymbol{\lambda})$の$\sigma$及び$\boldsymbol{\lambda}$に関する一次の偏微分係数を0と置くことにより、次式のように与えられる。

$$\frac{\partial L(\sigma, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial Q_j(\sigma)}{\partial \sigma_i} = 0 \qquad (i=1,\ldots,n) \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L(\sigma,\ \lambda)}{\partial \lambda_j} = -Q_j(\sigma) = 0 \qquad (j=1,\ldots,m) \qquad (6)$$

式(5)は変位の適合条件式、式(6)は力の釣合方程式にほかならない。この非線形連立方程式を解くことにより、トラス構造物の解析を行うことができる。

式(5)における偏微分係数 $\partial \Pi_c(\sigma)/\partial \sigma_i$, $\partial Q_j(\sigma)/\partial \sigma_i$ の値は、別稿の「エネルギー原理によるトラスの非線形感度解析」により、次のような簡単な式によりきわめて容易に求めることができる。

$$\frac{\partial \Pi_c(\sigma)}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i(\sigma_i)\cdot A_i \cdot l_i \qquad (7) \qquad\qquad \frac{\partial Q_j(\sigma)}{\partial \sigma_i} = C_{ji}\cdot A_i \qquad (8)$$

ここで、$\varepsilon_i(\sigma_i)$は部材 i のσ_iに対するひずみ量である。したがって、式(5),式(6)は、次のように表わされる。

$$\frac{\partial L(\sigma,\ \lambda)}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i(\sigma_i)\cdot l_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot C_{ji} = 0 \qquad (i=1,\ldots,n) \qquad (9)$$

$$\frac{\partial L(\sigma,\ \lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^{n} C_{ji}\cdot \sigma_i \cdot A_i - P_j = 0 \qquad (j=1,\ldots,m) \qquad (10)$$

この連立方程式を解くことによりσ_i及びλ_jが求められる。

ところで、式(9),式(10)の $\partial L(\sigma,\ \lambda)/\partial \sigma_i$、$\partial L(\sigma,\ \lambda)/\partial \lambda_j$は、$\sigma_i$及び$\lambda_j$の関数を含む方程式となり、直接解くことが困難であるためσ及びλの任意の初期値を与えて繰り返し計算を行うことにより最終的な解を得ることができる。この方法については、別稿の「エネルギー原理によるトラスの非線形感度解析」において述べることとし、ここでは、簡単のため数値計算例として、弾性係数が変化しない場合について述べる。

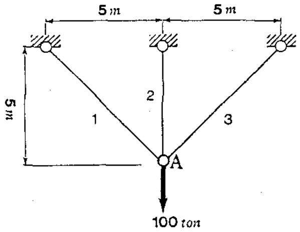
4．数値計算例及び考察

上で述べた方法により、図－2に示す3部材トラスを解いた例及びコンプリメンタリーエネルギー最小化による方法(CEM)により得られた結果との比較について述べる。いま、$A_1^0 = A_2^0 = A_3^0 = 20\mathrm{cm^2}$、および$E = 2000000\mathrm{kgf/cm^2}$と仮定すると、式(9)、(10)は、次のように表わされる。

$$\partial L/\partial \sigma_1 = 0.014142\,\sigma_1 - 28.284\,\lambda_1 = 0$$

$$\partial L/\partial \sigma_2 = 0.005\,\sigma_2 - 20\,\lambda_1 = 0$$

$$\partial L/\partial \lambda_1 = 28.284\,\sigma_1 + 20\,\sigma_2 - 100000 = 0$$



図－2　3部材トラス

この連立方程式を解くことにより、$\sigma_1 = 1464.5\mathrm{kgf/cm^2}$、$\sigma_2 = 2928.9\mathrm{kgf/cm^2}$、$\lambda_1 = 0.732\mathrm{cm}$を得る。この結果はCEMにより得られた結果と完全に一致している。(表－1参照)

また、$A_1^0 = A_3^0 = 10\mathrm{cm^2}$、　$A_2^0 = 20\mathrm{cm^2}$とした場合についても同様の計算を行い、$\sigma_1 = 1847.0\mathrm{kgf/cm^2}$、$\sigma_2 = 3694.0\mathrm{kgf/cm^2}$、$\lambda_1 = 0.923\mathrm{cm}$という結果を得た。この値もCEMにより得られた値と完全に一致している。(表－1参照)

表－1　3部材トラスの計算例

		応力度(kg/cm²)			点Aのたわみ(cm)
		部材1	部材2	部材3	
$A_1^0 = A_3^0 = 20\mathrm{cm^2}$	本方法	1464.5	2928.9	1464.5	0.732
$A_2^0 = 20\mathrm{cm^2}$	CEM	1464.5	2928.9	1464.5	0.732
$A_1^0 = A_3^0 = 10\mathrm{cm^2}$	本方法	1847.0	3694.0	1847.0	0.923
$A_2^0 = 20\mathrm{cm^2}$	CEM	1847.0	3694.0	1847.0	0.923

［参考文献］ 1)大久保　他，土・学・論　第374号　pp.427～436.　2)鷲津久一郎　エネルギ原理入門