ＦＥＴＭ法による平版構造の静力学的解析

鳥取大学　正員　神部　俊一
鳥取市役所　新田　洋介
鳥取大学大学院　学生員　○鈴木　慎一

1．まえがき

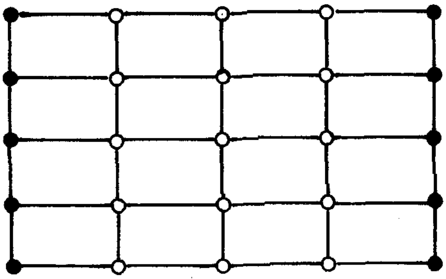
平版に変位型の有限要素法を適用して組み立てられた剛性方程式から内部領域の節点変位を消去して得られた式を再び変形し、一方境界領域におけるそれとの関係を表す格間伝達方程式を求める。　次いで、この格間伝達方程式を用いる伝達マトリックス法の別解法の“はさみ込み法”を平版に適用して解析したので報告する。　この解法によれば、状態量ベクトルの伝達区間が短くなるので大きな数値誤差が発生するのを防止することが期待できる。

2．剛性方程式

図－1に示すように、平版の離散化構造モデルを左側の境界領域（L）、内部領域（I）および右側の境界領域（R）に分割して剛性方程式を作成すると次のようになる。

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{K}_{LL} & \mathbf{K}_{LI} & \mathbf{K}_{LR} \\ \hline \mathbf{K}_{IL} & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IR} \\ \hline \mathbf{K}_{RL} & \mathbf{K}_{RI} & \mathbf{K}_{RR} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{u}_L \\ \hline \mathbf{u}_I \\ \hline \mathbf{u}_R \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F}_L \\ \hline \mathbf{F}_I \\ \hline \mathbf{F}_R \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに、$[\mathbf{K}_{ij}]$, $\{\mathbf{u}_i\}$および$\{\mathbf{F}_i\}$ $(i, j = L, I, R)$ は、それぞれ、剛性マトリックス、節点変位ベクトルおよび節点力ベクトルである。



図－1　離散化構造モデル

次に、式(1) の２番目の式を利用して $\{\mathbf{u}_I\}$を消去すれば次式を得る。

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{LL} & \mathbf{S}_{LR} \\ \hline \mathbf{S}_{RL} & \mathbf{S}_{RR} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \mathbf{u}_L \\ \hline \mathbf{u}_R \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F}_L \\ \hline \mathbf{F}_R \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c} \mathbf{F}_{LI} \\ \hline \mathbf{F}_{RI} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

ここに、

$$[\mathbf{S}_{LL}] = [\mathbf{K}_{LL}] - [\mathbf{K}_{LI}][\mathbf{K}_{II}]^{-1}[\mathbf{K}_{IL}], \quad [\mathbf{S}_{LR}] = [\mathbf{K}_{LR}] - [\mathbf{K}_{LI}][\mathbf{K}_{II}]^{-1}[\mathbf{K}_{IR}]$$

$$[\mathbf{S}_{RL}] = [\mathbf{K}_{RL}] - [\mathbf{K}_{RI}][\mathbf{K}_{II}]^{-1}[\mathbf{K}_{IL}], \quad [\mathbf{S}_{RR}] = [\mathbf{K}_{RR}] - [\mathbf{K}_{RI}][\mathbf{K}_{II}]^{-1}[\mathbf{K}_{IR}]$$

$$\{\mathbf{F}_{LI}\} = [\mathbf{K}_{LI}][\mathbf{K}_{II}]^{-1}\{\mathbf{F}_I\}, \quad \{\mathbf{F}_{RI}\} = [\mathbf{K}_{RI}][\mathbf{K}_{II}]^{-1}\{\mathbf{F}_I\}$$

3．格間伝達方程式

式(2) を $\{\mathbf{u}_R\}$および$\{\mathbf{F}_R\}$について解き整理すると、平版の左側と右側の境界領域における状態量ベクトル $\{\mathbf{y}_j\} = [\mathbf{u}_j{}^T \mid \mathbf{F}_j{}^T \mid 1\ ]^T$ $(j = R, L)$ の間の関係を表す次の格間伝達方程式が求まる。

$$\{\mathbf{y}_R\} = [\mathbf{T}]\{\mathbf{y}_L\} \quad \cdots\cdots (3)$$

ここに、

$$[\mathbf{T}] = \left[\begin{array}{c|c|c} -\mathbf{S}_{LR}{}^{-1}\mathbf{S}_{LL} & \mathbf{S}_{LR}{}^{-1} & \mathbf{L}_L \\ \hline \mathbf{S}_{RL} - \mathbf{S}_{RR}\mathbf{S}_{LR}{}^{-1}\mathbf{S}_{LL} & \mathbf{S}_{RR}\mathbf{S}_{LR}{}^{-1} & \mathbf{L}_R \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{array}\right]$$

さらに、

$$\{\mathbf{L}_L\} = -[\mathbf{S}_{LR}]^{-1}\{\mathbf{F}_{LI}\}$$

$$\{\mathbf{L}_R\} = -[\mathbf{S}_{RR}][\mathbf{S}_{LR}]^{-1}\{\mathbf{F}_{LI}\} + \{\mathbf{F}_{RI}\}$$

4．計算方式

左側から右側に向う座標系を左側座標系と呼び、これと向き合う座標系を右側座標系と呼ぶ。　それぞれの座標形に対して、有限要素の局所節点番号と節点変位の符号を図－２と図－３に示すように設定すると、格間行列の表示式は両側の座標系に関して同じになる。　次に、構造モデルの縦方向の任意の分割線上において節点変位に関して連続条件、節点力に関して作用・反作用の法則を考慮に入れると両側の座標系に関する状態量ベクトルを関係付ける接続行列［**C**］が定義できる。　そこで、両側の境界領域における未知量を成分とするベクトル $\{\mathbf{Z}_L\}, \{\mathbf{Z}_R\}$ および初期量ベクトルを初期状態量ベクトルに変換するのがその役割である境界行列 $[\mathbf{B}_L], [\mathbf{B}_R]$ を導入すれば次の関係式が得られる。

$$[\mathbf{N}_{LC}]\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_L\\ \text{----}\\ 1\end{bmatrix} = [\mathbf{C}][\mathbf{N}_{RC}]\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_R\\ \text{----}\\ 1\end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots (4)$$

ここに、

$$[\mathbf{N}_{LC}] = [\mathbf{T}][\mathbf{B}_L], \quad [\mathbf{N}_{RC}] = [\mathbf{T}][\mathbf{B}_R]$$

式（４）を変形して整理すれば、初期量ベクトルを定めるための次の連立一次方程式が得られる。

$$[\mathbf{M}]\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_L\\ \text{----}\\ \mathbf{Z}_R\end{bmatrix} = \{\mathbf{L}\} \qquad \cdots\cdots (5)$$

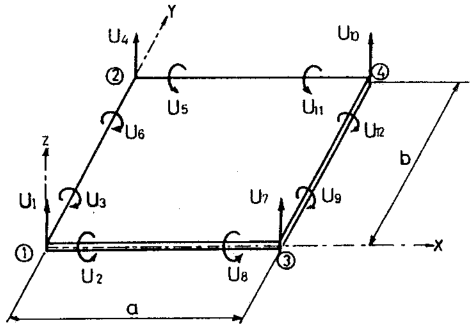
ここに、［**M**］は係数行列であり｛**L**｝は荷重項ベクトルである。

5．数値計算例

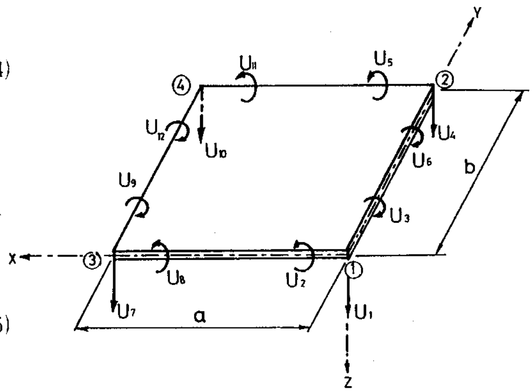
数値解析に用いた構造モデルは両端を単純支持され等分布荷重を満載されたスラブであり、その諸元は支間長１６m，幅員８m，床版厚さ５０ｃｍである。この構造モデルは１２自由度の長方形要素を用いて支間方向に８分割、幅員方向に４分割されている。上述の解法をこの構造モデルに適用して解いた変形図を図－４に示す。

6．あとがき

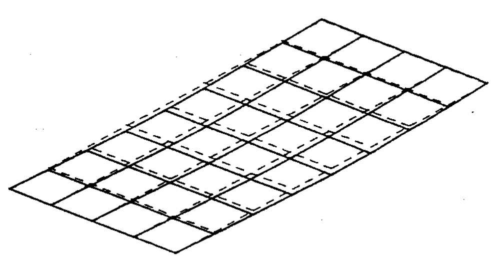
この解法の適用例は極く簡単な構造モデルについてであるが、より複雑な構造物を解析できるようその適用範囲を拡げていくのが今後の課題であると考えている。



図－２　左側座標形に関する節点変位



図－３　右側座標形に関する節点変位


図－４　はさみ込み法による変形状態図