確率 L.P. を用いた貯水池運用計画モデルに関する研究

鳥取大学大学院　学生員　○高尾　秀樹
鳥取大学工学部　正会員　多々納裕一
鳥取大学工学部　正会員　小林　潔司

1. 研究の概要

渇水による信頼性を評価する際には、「生起頻度」、「期待継続期間」、「期待損失」といった指標を用いて多元的に評価することが不可欠である。そこで、本研究では渇水の「生起頻度」や「期待継続期間」を制約とする期待損失最小化問題として、貯水池操作ルールの設計モデルを定式化する。また、本研究では得られた最適混合戦略に基づいて、最適純粋戦略の近似解を求める方法を提案する。

2. 信頼性評価指標の定式化

ここで、上述の問題を定式化するために渇水に対する信頼性評価指標を定式化する。そこでまず、時点 n における状態を (X_n, M_n) で定義する。X_n は放流可能量、M_n は時点 n までの渇水継続期間である。さらに、正常状態を S、渇水状態を F とすると渇水の「生起頻度」、「期待継続期間」、及び「期待損失」は、以下のように定式化される。

A）渇水の生起頻度 FR

渇水状態が生じてから、次に正常状態に戻るまでの期間を、ひと続きの「渇水」と見れば、渇水の生起頻度は、このひと続きの渇水が生起する確率として、次式のように定義される。

$$
\begin{aligned}
FR &= \lim_{n\to\infty} \Pr\{(X_n, M_n) \in S, (X_{n-1}, M_{n-1}) \in F\} \\
&= \sum_{(x,m)\in S} \sum_{(y,k)\in F} P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)} \pi_{(x,m)} \\
&= \sum_{y \in F(0)} \pi_{(y,0)}
\end{aligned}
$$

B）渇水の期待継続期間 ED

渇水状態が生起したという条件の下で、次に正常状態に戻るまでの期間数の期待値であり、次式のように定式化される。

$$
\begin{aligned}
ED &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m} m \Pr\{(X_n, m) \in S \\
&\quad | (X_{n+m-1}, M_{n+m-1}) \in F, (X_{n+m}, M_{n+m}) \in S\} \\
&= \frac{\sum_{m} \sum_{x\in S(m)} m\pi_{(x,m)}}{\sum_{(x,m)\in S} \sum_{(y,k)\in F} P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)} \pi_{(x,m)}}
\end{aligned}
$$

C）渇水の期待損失 EL

放流量 u に対する損失を $L(u)$ とおくと、渇水の期待損失は以下のように定義される。

$$
\begin{aligned}
EL &= \lim_{n\to\infty} L(u(x,m)) \Pr\{(X_n, M_n) \in F\} \\
&= \sum_{x} \sum_{m} \pi_{(x,m)} L(u(x,m))
\end{aligned}
$$

ここで、$P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)}$ は状態 (x,m) で放流 u を行なったときに次期に状態 (y,k) に推移する確率である。また、$\pi_{(x,m)}$ は状態 (x,m) の定常生起確率である。

3. モデルの定式化

本研究では、単一の貯水池（貯水容量 v）と、単一の評価地点（必要流量 d）とからなる流域モデルを想定する。この貯水池の操作ルール設計問題を取り上げ、次の3つの設計問題を対象として分析を行なう。

問題A 信頼性制約のない期待損失最小化問題
問題B「生起頻度」を制約とする期待損失最小化問題
問題C「期待継続期間」を制約とする期待損失最小化問題

さて、信頼性制約のない期待損失最小化問題（問題A）を、L.P. モデルとして以下のように定式化しよう。

（問題A）信頼性制約のない期待損失最小化問題

$$
\min_{\{Z^u_{(x,m)}\}} \sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} L(u) \quad (1)
$$

subject to (2)

$$
\sum_{u} Z^u_{(y,k)} = \sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)} \quad (3)
$$

$$
\sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} = 1 \quad (4)
$$

$$
\sum_{u} Z^u_{(x,m)} \geq 0 \quad (5)
$$

X_n, M_n がそれぞれ x, m をとる場合に、放流量が u である確率を $d^u_{(x,m)}$ とおく。$D = \{d^u_{(x,m)}\}$ は、混合戦略と考えることができる。ここで、$\pi_{(x,m)} d^u_{(x,m)} \equiv Z^u_{(x,m)}$

とした。また、「生起頻度」の制約値を α とすると、問題Bは問題Aの制約条件に以下に示す式 (8) を加えたものとして定式化できる。

（問題Ｂ）「生起頻度」を制約とする期待損失最小化問題

$$\min_{\{Z^u_{(x,m)}\}} \sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} L(u) \tag{6}$$

subject to (7)

$$\sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} L_F(u,m) \leq \alpha \tag{8}$$

$$\sum_u Z^u_{(y,k)} = \sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} P_{(x,m)}{}^u{}_{(y,k)} \tag{9}$$

$$\sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} = 1 \tag{10}$$

$$\sum_u Z^u_{(x,m)} \geq 0 \tag{11}$$

同様にして、「期待継続期間」の制約値を β とすると問題Ｃは問題Ａの制約条件に式 (14) を加えたものとして定式化できる。

（問題Ｃ）「期待継続期間」を制約とする期待損失最小化問題

$$\min_{\{Z^u_{(x,m)}\}} \sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} L(u) \tag{12}$$

subject to (13)

$$\sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} \{L_M(u,m) - \beta L_F(u,m)\} \leq 0 \tag{14}$$

$$\sum_u Z^u_{(y,k)} = \sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} P_{(x,m)}{}^u{}_{(y,k)} \tag{15}$$

$$\sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} = 1 \tag{16}$$

$$\sum_u Z^u_{(x,m)} \geq 0 \tag{17}$$

ここで、$L_F(u,m) = \chi(u < d)\chi(m = 0)$ ，$L_M(u,m) = m\chi(u \geq d)\chi(m > 0)$ とし、$\chi(\kappa)$ は κ が真のとき１、偽のとき０をとる。

問題 A の最適解は純粋戦略となることがわかっている。一方、問題 B 、及び問題 C の最適解には高々１つの混合戦略が含まれる。この際、混合戦略を構成する２つの純粋戦略の内、１つは実行可能領域の内側に、もう１つは外側に存在している。そこで、本研究では混合戦略を構成する純粋戦略の内で、実行可能領域の内側に存在する解を最適純粋戦略の近似解として採用することとした。

4. 数値計算事例

問題Ｂ、及び問題Ｃを対象として、α, β の制約値を変化させた場合操作ルールがどのように変化するのかを調べた。この結果の一部を図-1、図-2 に示す。

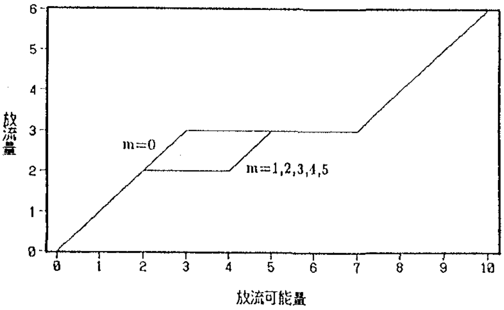

図-1:「生起頻度」を制約とする貯水池操作ルール

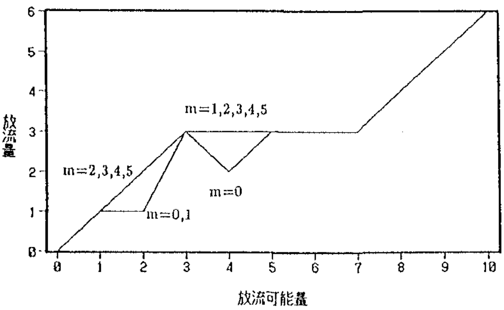

図-2:「期待継続期間」を制約とする貯水池操作ルール

これらの図は、問題Ｂ、及び問題Ｃの解として得られた混合戦略を、上述の方法を用いて最適純粋戦略の近似解として算定したものである。図-1を見ると、$m = 0$ の場合にはできるだけ渇水を発生させないような操作を行ない、$m \geq 1$ の場合は継続期間を増加させ、「生起頻度」を減少させる操作ルールが採用された。図-2を見ると、$m = 0$ では $X_n \geq d$ であるにも関わらず $U_n < d$ という操作が生じている。すなわち、継続期間の短い渇水を頻繁に起こすことにより、「生起頻度」を増加させ「期待継続期間」を減少させるような操作ルールが求まっている。また、$X_n < d$ のときには $U_n < X_n$ とし、貯水量を温存する操作が行なわれている。

5. おわりに

今後の課題として特に問題Ｃに関し、より精度の良い最適純粋戦略の近似解を求める方法について研究をすすめる必要がある。さらに、渇水の「生起頻度」と「期待継続期間」との間にトレードオフの関係がある。そこで、今後２つの制約条件を同時に考慮したモデルを用いた分析を実施する予定である。