不規則波の波高の相関係数の推定について

鳥取大学工学部　正員　○太田 隆夫
鳥取大学工学部　正員　　木村　晃

1．はじめに

海の波の特徴はその不規則性に代表されるが，完全にランダムであるというわけではなく，たとえば波高の大きな波が数波連なって現れることがある．こうした波の特性（波群，高波の連）は浮体の長周期動揺やサーフビートなどに影響をおよぼすと考えられ，近年盛んに研究が行われている．高波の連長の確率特性を記述する理論は木村(1980)によって与えられており，この理論によれば隣合う波高の相関係数より求められる相関パラメータが連長を支配するパラメータとなっている．しかし相関係数を求めるには波形記録が必要であり，また波浪統計の分野では伝統的にスペクトルと関連づけて研究が行われてきた経緯もあって，Battjesら(1984)，Longuet-Higgins(1984)が相関パラメータを周波数スペクトルから求める方法を提案している．ここで考慮しなければならないのは，相関係数，周波数スペクトルともに波形記録の長さが有限であることに起因する変動性を有することである．したがってこれらより推定される相関パラメータも変動性を有し，その変動の大きさが問題となる．本研究は相関パラメータを相関係数から求める場合と周波数スペクトルから求める場合の２つの方法について相関パラメータの変動性を考慮し，これらの方法の精度について検討を行うものである．

2．相関パラメータ

木村は隣合う波高の相関係数γ_hから次の関係式を用いて相関パラメータκを求めている．

$$\gamma_h = \frac{E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa)/2 - \pi/4}{1-\pi/4} \qquad (1)$$

ここに，K，Eはそれぞれ第１種および第２種完全楕円積分である．一方，Battjesらは式（２）を用いて周波数スペクトルS(f)からκを求めることを提唱している．

$$\kappa = \sqrt{\mu_{13}^2 + \mu_{14}^2}/m_0 \qquad (2) \qquad \text{ここに,}\quad \mu_{13} = \int_0^\infty S(f)\cos(2\pi f\tau)\,df \quad , \quad \mu_{14} = \int_0^\infty S(f)\sin(2\pi f\tau)\,df$$

m_0は周波数スペクトルの０次モーメント，τは時間差パラメータである．Longuet-Higginsもほぼ同様の式を用いている．本研究はκを式（１）から推定する場合と式（２）から推定する場合との精度を検討するものである．しかし，相関係数の変動の大きさから式（１）を用いてκの変動の大きさを求めることは困難であるため，相関係数に置き換えて議論を進める．すなわち，相関係数，周波数スペクトルおよび相関パラメータの変動性をそれらの分散で表し，まず周波数スペクトルの分散から式（２）を用いてκの分散を求める．つぎにκの分散から式（１）を用いて相関係数の分散を求める．一方，相関係数の分散はこれとは独立に不規則波形のデータから求められる．したがって両者を比較することにより相関係数の推定精度を議論することができ，引いては相関パラメータの推定精度を推測できる．

3．相関係数の分散

式（２）を用いてκの分散を求めるために，この式中の積分変換を次のように級数近似する．

$$\mu_{13} \cong \sum_{i=1}^{\infty} S(f_i)\cos(2\pi f_i\tau - 2\pi\bar{f}\tau)\,\Delta f \qquad (3) \qquad\qquad \mu_{14} \cong \sum_{i=1}^{\infty} S(f_i)\sin(2\pi f_i\tau - 2\pi\bar{f}\tau)\,\Delta f \qquad (4)$$

式（３），（４）よりμ_{13}とμ_{14}の分散は次のように与えられる．

$$\mathrm{Var}[\mu_{13}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} S^2(f_i)\cos^2(2\pi f_i\tau - 2\pi\bar{f}\tau)\,\Delta f^2 \quad (5) \qquad \mathrm{Var}[\mu_{14}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} S^2(f_i)\sin^2(2\pi f_i\tau - 2\pi\bar{f}\tau)\,\Delta f^2 \quad (6)$$

ここに，nは周波数スペクトル推定時の自由度である．本研究では式（５），（６）で与えられる分散から相関パラメータおよび相関係数の分散を求める方法として次の２つを用いた．１つは誤差伝播則（１次近似）を用いた方法で，相関パラメータおよび相関係数の分散は次のように与えられる．

$$\mathrm{Var}[\kappa]=\frac{\mathrm{Var}[\mu_{13}]\,\overline{\mu_{13}}^2+\mathrm{Var}[\mu_{14}]\,\overline{\mu_{14}}^2}{m_0^2\left(\overline{\mu_{13}}^2+\overline{\mu_{14}}^2\right)} \quad (7) \qquad \mathrm{Var}[\gamma_h]\cong\mathrm{Var}[\kappa]\left(\frac{2}{\bar{\kappa}\,(4-\pi)}\right)^2\left\{E(\bar{\kappa})-\left(1-\bar{\kappa}^2\right)K(\bar{\kappa})\right\}^2 \quad (8)$$

ここに，$\overline{}$ は期待値を表す．もう１つは，μ_{13}，μ_{14} が式（３），（４）より求められる平均値（期待値）と式（５），（６）で与えられる分散とをもつ正規分布にしたがうと仮定して κ の確率密度関数を導き，これと式（１）の近似式とにより相関係数の分散を求める方法である．まず κ の確率密度関数は次の式で与えられる．

$$p(\kappa)=\frac{m_0^2\kappa}{\psi}\exp\left\{-\frac{m_0^2\kappa^2+\eta^2}{2\psi}\right\}I_0\left(\frac{m_0\kappa\eta}{\psi}\right) \qquad (9)$$

ここに，$\eta=(\overline{\mu_{13}}^2+\overline{\mu_{14}}^2)^{1/2}$，$\psi=\mathrm{Var}[\mu_{13}]=\mathrm{Var}[\mu_{14}]$ である．式（９）と式（１）の近似式

$$\gamma_h\cong\frac{\pi}{16-4\pi}\left(\kappa^2+\frac{\kappa^4}{16}\right) \qquad (10)$$

を用いると，相関係数の分散は次の式で求められる．

$$\mathrm{Var}[\gamma_h]=\left(\frac{\pi}{16-4\pi}\right)^2\left(\overline{\kappa^4}+\frac{\overline{\kappa^6}}{8}\right)-\overline{\gamma_h}^2 \qquad (11)$$

ここで，$\overline{\kappa^n}$ は次の式により与えられる．

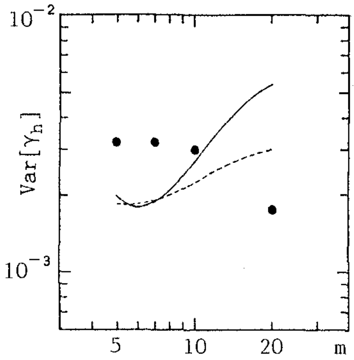
$$\overline{\kappa^n}=\frac{1}{m_0^n}(2\psi)^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right){}_1F_1\left(-\frac{n}{2}\,;\,1\,;\,-\frac{\eta^2}{2\psi}\right) \qquad (12)$$

ここに，${}_1F_1$ は合流型超幾何関数である．これらより相関係数の分散は次のように与えられる．

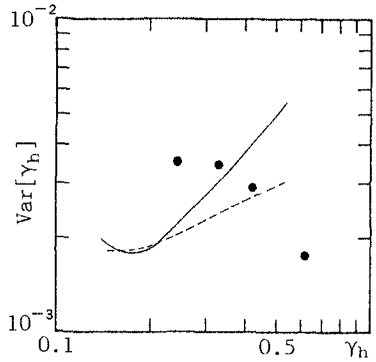
$$\mathrm{Var}[\gamma_h]=\frac{1}{m_0^4}\left(\frac{\pi}{16-4\pi}\right)^2\left\{8\psi^2+8\psi\eta^2+\eta^4+\frac{1}{m_0^2}\left(6\psi^3+9\psi^2\eta^2+\frac{9}{4}\psi\eta^4+\frac{\eta^6}{8}\right)\right\} \qquad (13)$$

４．結果

３．で述べた方法により求めた相関係数の分散を図－１，図－２に示す．図－１の横軸はスペクトルの形状パラメータm，図－２の横軸は相関係数の値，縦軸はともに分散である．実線が式（８）によるもの，破線が式（１３）によるものである．●はシミュレートした不規則波形から求めた相関係数の分散を表す．これらの図より，周波数スペクトルから求めた相関係数の分散と，不規則波形から求めた相関係数の分散とは大きな差がないことがわかる．したがって，相関パラメータを推定する２つの方法はほぼ同等の精度を有することが推測される．ただし周波数スペクトルから求めた相関係数の分散は，スペクトルが狭帯域になるにつれ，また隣合う波高の相関が高くなるにつれ，大きくなる．このため，適切な範囲内で周波数スペクトル推定時の自由度を上げてスペクトルの分散を小さくする必要がある．



図－１　mと相関係数の分散との関係



図－２　相関係数とその分散との関係

<参考文献>Battjes, J. A. and G. Ph. van Vledder (1984) : Proc. 19th ICCE, pp. 642-648　Kimura, A (1980) : Proc. 17th ICCE, pp. 2955-2973　Longuet-Higgins, M. S. (1984) : Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, Vol. 312, pp. 219-250