き裂伝播解析へのF. E-B. E法の適用

岡山大学大学院　○学生員　小野正博
三 井 造 船 ㈱　　　　　井上大三
岡山大学工学部　　正　員　廣瀬壮一
岡山大学工学部　　正　員　谷口健男

1. まえがき

近年、計算機の性能の向上により、工学問題に数値解析システムを利用しようとする傾向が強くなっている。既存する有力な解析手法としては、有限要素法・境界要素法が挙げられる。それぞれには一長一短がある。有限要素法は、形状の複雑な問題は容易に取り扱えれるが、応力に特異性を有する場合には注意を要する。また境界要素法はき裂問題に対しては取り扱いが容易であるが、形状の複雑な問題には難がある。そこで本研究では複雑な構造系において応力集中を生じる２次元平面ひずみ領域に境界要素法を、他の領域には有限要素法を適用する有限要素−境界要素混合解法を提案する。

2. 有限要素−境界要素混合解法の構築

1)混合解法の基本的な考え方　有限要素と境界要素とが結合している境界について考える。対応する節点では変位は同じである。また力の伝達は作用・反作用の法則により、向きは逆で大きさの等しい力が作用する。ここで、有限要素法では力を節点力、境界要素法では表面力と定義しているため式(１)のような変換が必要となる。これらの変位と力の適合条件を用いて有限要素法による方程式系(２)と境界要素法による方程式系(３)とを連立させて解くことにより解を得ることが出来る。ただし、有限要素、境界要素を共有できるよう２次アイソパラメトリック要素を要素として用いた。

$$\{P_J\} = -\begin{bmatrix} \ddots & sym. \\ R & \ddots \end{bmatrix}\{t_J\} \quad n_J \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_F \\ u_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_F \\ P_J \end{Bmatrix} \begin{matrix} n_F \\ n_J \end{matrix} \qquad (2)$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_J \\ u_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} t_J \\ t_B \end{Bmatrix} \begin{matrix} n_J \\ n_B \end{matrix} \qquad (3)$$

- t_J ： 共有点に作用する表面力
- t_B ： 境界要素に作用する表面力
- [K] ： 剛性マトリックス
- [U] ： 一重層ポテンシャル
- [T] ： 二重層ポテンシャル
- [R] ： 等価節点力と表面力の変換マトリックス
- n_F ： 有限要素総節点数×自由度
- n_J ： 共有節点数×自由度
- n_B ： 境界要素総節点数×自由度
- u_F ： 有限要素節点の節点変位
- u_J ： 共有節点の節点変位
- u_B ： 境界要素節点の節点変位
- P_F ： 有限要素節点に作用する節点力
- P_J ： 共有節点に作用する節点力

2)全体系方程式への組み込み　　これらを最も簡単な方法で組み込むと式(４)のようになる。しかし、この式を用いるとモデルによっては

Ⅰ　マトリックス分解途中、対角項=0となりPIVOT選択による行の交換が必要となる。

Ⅱ　変換マトリックスによる変換が正確でないために解の乱れが引き起こされる。

のような問題が生じる。このため、ここでは変換マトリックス[R]が正定かつ対称であることに着目し、コレスキー分解を用いた逆行列演算手法を導入する。その後、共有境界上における未知表面力を方程式系より消去する。この操作により組み立てられた方程式系は式(５)のようになる。これは式(４)に比較して方程式系は小さく、共有境界上の表面力を未知量としない。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & \\ K_{21} & K_{22} & -R & \\ 0 & T_{11} & U_{11} & T_{12} \\ & T_{21} & U_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_F \\ \boldsymbol{u}_J \\ -\boldsymbol{t}_J \\ \boldsymbol{u}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_F \\ 0 \\ U_{12}\boldsymbol{t}_B \\ U_{22}\boldsymbol{t}_B \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ 0 \;\; V_1 & V_2 & T_{21} \\ & & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_F \\ \boldsymbol{u}_J \\ \boldsymbol{u}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_F \\ U_{12}\boldsymbol{t}_B \\ U_{22}\boldsymbol{t}_B \end{Bmatrix} \quad (5)$$

共有要素内節点最小節点番号×2

3. 解析例と結果

本研究で構築した有限要素－境界要素混合解法によるき裂解析システムに対して、解の妥当性の検討を行う。解析を行うモデルとして"一様な引っ張り応力を受ける長方形板における中央型斜めき裂(図１)"を採用する。形状パラメータは a/w=0.4, θ=30°, H=2w とし、全体的な要素分割を図２に示す。図２において、き裂を含む領域が境界要素領域で、その上下の要素分割された領域が有限要素法の解析領域である。

図３に解析結果を示す。図中において横軸はき裂境界上の要素長Δa/a、縦軸は応力拡大係数に関する誤差vである。a), b) はそれぞれMode I, Mode II についてのものである。解の傾向は境界要素法単独で解析した結果とほぼ同様であり、十分な精度が確保されていると思われる。ただし、(a)の場合は他の要素分割パターンに比べて異なった挙動を示している。

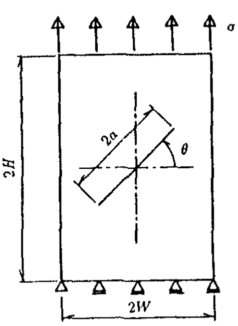

図１　解析モデル

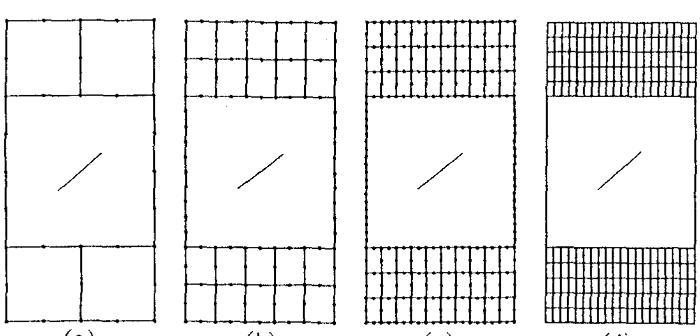

図２　要素分割図

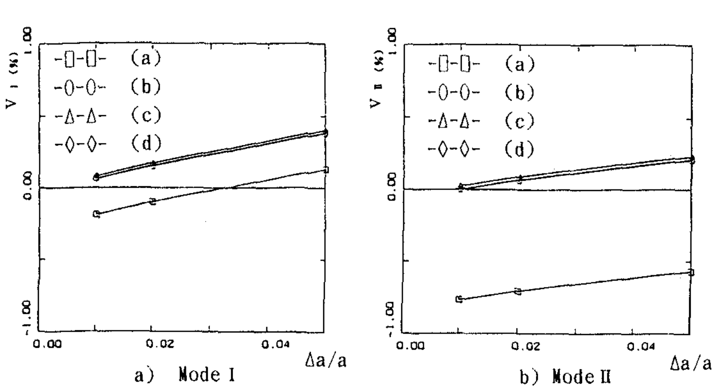

図３　誤差(v)と要素長(Δa/a)の関係