

不規則パルス過程を用いた梁構造物の信頼性評価法

鳥取大学工学部 正会員 白木 渡 鳥取大学大学院 学生会員 ○恒国光義
鳥取大学工学部 正会員 松保重之 愛媛県庁 矢野英敏

1. まえがき 一般に、統計的に不均一な曲げ剛性を有する梁構造物のたわみは確率過程として取り扱われる。従って、このたわみのレベル超過を考えることによりその構造物の信頼性を評価する場合、厳密には確率過程論に基づいて解析しなければならない。しかし、このことは困難な場合が多い。本研究では、確率有限要素解析により求められる梁構造物の各有限要素のたわみ量の確率特性値(期待値、分散等)を用いて、そのたわみを再生パルス過程とみなしてモデル化し、このパルス過程のレベル超過を考えることにより、簡便的に梁構造物の信頼性を評価する。

2. 移動平均過程による確率特性の評価法 ここでは、梁構造物の統計的に不均一な曲げ剛性を、空間的な相関特性を有する一次元の定常過程と仮定し、これを有限要素のモデルに分割した際に、その相関特性を移動平均過程¹⁾を用いて各要素間の相関特性に変換する方法について説明する。

図-1に示すような期待値 m_{EI} および標準偏差 σ_{EI} を有する定常不規則関数 $EI(x)$ の移動平均過程 $EI_X(x)$ は式(1)のように定義される。ここで X は積分する区間を示す。この $EI_X(x)$ の期待値 $E[EI_X(x)]$ および分散 $Var[EI_X(x)]$ は、それぞれ式(2)および式(3)となる。ここで、式(3)中の $\gamma(X)$ は $EI(x)$ の分散関数と呼ばれるものであり、この分散関数と、 $EI(x)$ の距離差 $\tau=|x_1-x_2|$ の(規準化された)相関関数 $\rho_{EI, EI}(\tau)$ との関係は式(4)のようになる。さらに、図-1に示されているように x 軸上に任意に設けた2つの線分 X と X' との2つの有限要素に対応する各移動平均 $EI_X(x)$ と $EI_{X'}(x)$ との共分散 $Cov[EI_X, EI_{X'}]$ は式(5)のようになる。ここに、 X_0, X_1, X_2 および X_3 は図-1に示す区間である²⁾。これらの有限要素が、本研究における確率有限要素解析での各要素に対応し、解析の際には、これらの長さを等しくとる。

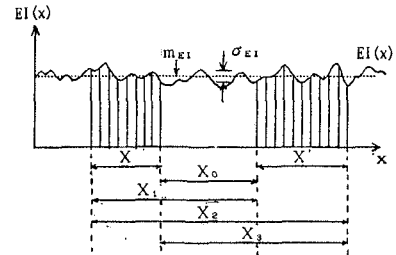


図-1

$$EI_X(x) = \frac{1}{X} \int_{x-X/2}^{x+X/2} EI(x) dx \quad (1)$$

$$E[EI_X(x)] = m_{EI} \quad (2)$$

$$Var[EI_X(x)] = \sigma_{EI}^2 \cdot \gamma(X) \quad (3)$$

$$\gamma(X) = \frac{2}{X} \int_0^X \left(1 - \frac{\tau}{X}\right) \rho_{EI, EI}(\tau) d\tau \quad (4)$$

$$Cov[EI_X, EI_{X'}] = \frac{1}{X \cdot X'} \cdot \frac{\sigma_{EI}^2}{2} \cdot [X_0^2 \gamma(X_0) - X_1^2 \gamma(X_1) + X_2^2 \gamma(X_2) - X_3^2 \gamma(X_3)] \quad (5)$$

$$\{K\} \{U\} = \{Q\} \quad (6)$$

$$U_i = U_i(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m) + \sum_{k=1}^m (r_k - \bar{r}_k) \frac{\partial U_i}{\partial r_k} \bigg|_E \quad (7)$$

$$E[U_i] = U_i(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m) \quad (8)$$

$$Var[U_i] = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left[\frac{\partial U_i}{\partial r_k} \bigg|_E \right] \left[\frac{\partial U_l}{\partial r_l} \bigg|_E \right] Cov[r_k, r_l] \quad (9)$$

$$Cov[U_i, U_j] = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left[\frac{\partial U_i}{\partial r_k} \bigg|_E \right] \left[\frac{\partial U_j}{\partial r_l} \bigg|_E \right] Cov[r_k, r_l] \quad (10)$$

3. 線形一次近似理論を用いた確率有限要素法 確率有限要素解析により梁構造物のたわみ量の確率特性値(期待値、分散、共分散)を求める方法について簡単に説明する。

いま、有限要素法において式(6)に示される剛性方程式が求められているとする。ここで、剛性マトリックス $[K]$ および荷重ベクトル $\{Q\}$ が m 個の不確定要因 $\{r\} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ の関数であるとして、変位ベクトル $\{U\}$ も $\{r\}$ の関数となる。節点 i における変位 U_i を不確定要因 $\{r\}$ のまわりでTaylor展開し、2次以上の高次の項を無視すると式(7)のようになる。ここに、 $\partial U_i / \partial r_k|_E$ は偏導関数 $\partial U_i / \partial r_k$ において不確定要因 $\{r\}$ の期待値を代入したときの値であり、 r_k は $E[r_k]$ ($k=1, 2, \dots, m$)を表わす。式(7)を用いて節点変位 U_i の期待値、分散および共分散を求めるとそれぞれ式(8)、(9)および式(10)のようになる³⁾。本研究では、 $m=1$ であり、不確定要因 r_1 が梁構造物の曲げ剛性となる。また、式(10)の $Cov[r_k, r_l]$ が式(5)に対応する。

4. 再生パルス過程を用いた信頼性解析 ここでは、確率有限要素解析により得られた梁構造物のたわみ量およびその確率特性値を用いて、そのたわみ量をBasic-Typeの再生パルス過程⁴⁾としてモデル化することについて

述べる。

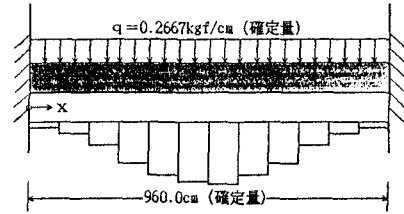
曲げ剛性 $EI(x)$ が定常過程であっても、式(11)の構造方程式を解いて得られるたわみ量 $y(x)$ は非定常過程となる。従って、そのたわみ量をモデル化した再生パルス過程がある断面においてレベル a を超過する単位長さ当たりの確率 $\nu_{u'}(a)$ は、各パルス間の相関を考慮して式(12)のようになる。この式において、 $f_{uu'}(u, u')$ は一つの断面 x 、および $x' = x + \Delta x_i$ (Δx_i :各要素の中心間距離)とにおける各パルスの同時確率密度関数である。いま、ある断面におけるたわみ量 $y(x)$ が与えられた高いレベル a を超過するという事象の生起する回数はポアソン分布で近似できるとすると、破壊確率 $Q_u(a)$ は式(13)のように与えられる。ここに、 n は要素数である。

$$\frac{d^2}{dx^2} \{EI(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2}\} = q(x) \quad (q(x): \text{分布荷重}) \quad (11)$$

$$\nu_{u'}(a) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{-\infty}^a \int_a^{\infty} f_{uu'}(u, u') du du' \quad (12)$$

$$Q_u(a) = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n \nu_{u'}(a) \cdot \Delta x_i\right) \quad (13)$$

5. 数値計算例 本研究において対象とする梁構造物は、文献5)を参考にして図-2に示すようにモデル化した。曲げ剛性 $EI(x)$ は、空間座標 x に関して正規定常過程であると仮定し、相関関数として、式(14)に示されるように相関性が2点間の距離に対して指数関数的に減少するモデルを用いた。本研究では、確率有限要素解析における要素数 n を8, 12, 16, 20, 24, 28, 32と変化させ、得られた各要素のたわみ量は正規分布するものと仮定した。また、断面 x および x' におけるパルスの相関係数 $\rho_{u, u'}$ は式(15)で与えられ、ここに、 σ_u および $\sigma_{u'}$ は、確率有限要素解析により得られる x および x' における各たわみ量の標準偏差であり、同様に、 $\text{Cov}[U, U']$ は x, x' におけるたわみ量の共分散である。一方、超過のレベル a の値については、0.70cm, 0.80cm, 0.90cmと設定した。要素数 n を変えた時の各レベルに対する破壊確率の変化の様子を図-3に示している。この結果より、要素数が12もしくは16、すなわち、各要素の長さが、 $EI(x)$ の相関距離の1/3~1/4で破壊確率が収束している様子が分かる。このことは、文献5)とほぼ同様な結果が得られている。また、図-4には隣接するパルス間の相関係数が変化すると考えた場合の破壊確率の変化を、レベルが0.80cm(ただし要素数は16)の場合を例にして示している。これより、本手法により算定した破壊確率はどの相関係数に対しても、各要素のたわみ量を確率変数とみなした場合、すなわちそれらが完全非相関の時の各要素の破壊確率の和と、各要素のたわみ量が完全相関の時の要素中の最大破壊確率との間の範囲内にあることが確認できる。このことは他の2つのレベルについても同様であり、従って、隣接する要素間の相関が大きく変動するような場合にも本手法は有効であると考えられる。



曲げ剛性の平均値: $EI = 1.0125 \times 10^9 \text{ kgf/cm}^2$
曲げ剛性の分散: $\sigma_{EI}^2 = 4.1625 \times 10^4 \text{ kgf}^2/\text{cm}^4$
(変動係数: 0.2)

図-2

$$\rho_{EI, EI}(\tau) = \exp(-|\tau|/cL) \quad (c=0.25) \quad (14)$$

$$\rho_{u, u'} = \frac{\text{Cov}[U, U']}{\sigma_u \cdot \sigma_{u'}} \quad (15)$$

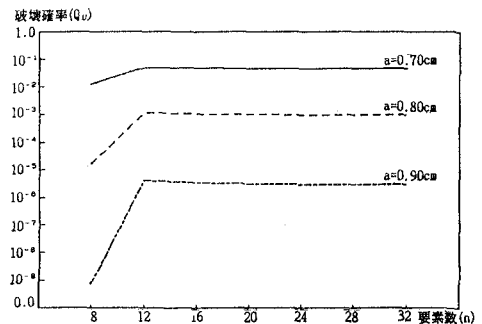


図-3

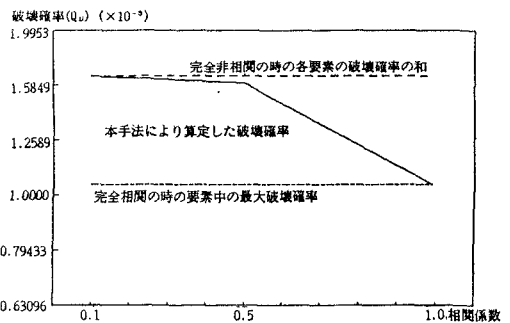


図-4

参考文献 1) E. Vanmarcke and M. Gaigoria: Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams, ASCE, EM, Vol. 109, NO. EM5, Oct. 1983. 2) 鈴木誠, 石井清: 確率有限要素法と要素分割, 土木学会論文集, 第386号, pp. 237-245, 1987-10. 3) 桜井春輔, 土居康成: 有限要素法による斜面の信頼性解析, 土木学会論文報告書, 第330号, pp. 87-97, 1983-2. 4) R. D. Larrabee and A. Cornell: Combination of Various Load Processes, ASCE, ST, Vol. 107, NO. ST1, pp. 223-239, Jan., 1981. 5) A. D. Kiureghian and J. B. Ke: Stochastic Finite Element Method in Structural Reliability, Jour. of Probability Engineering Mechanics, Vol. 3, NO. 2, pp. 83-91, 1988.