変位制約をも考慮した材料非線形トラスの最適設計法に関する基礎的研究

愛 媛 大 学 工 学 部　正会員　大久保禎二
日本ソフトウェア開発(株)　正会員　林　英範
愛 媛 大 学 大 学 院　学生員　○大森　久義

1．まえがき

近年、構造物の設計思想の中に、構造物の各種の限界状態を基準とした設計法の考え方が導入されつつあるが、このような見地から、従来の許容応力度設計法に加えて、構造物の各種の限界状態を対象とした最適設計法の研究が極めて重要な問題となる。この観点に立って、著者らの研究室では、これまでにエネルギー原理に基づき材料の非線形性を考慮した骨組構造物の部材力および変位の解析方法に関する研究を行ってきた。本研究では、これらの研究を基礎として、非線形性を有する材料よりなるトラス構造物の、応力度のみならず変位の制約条件をも考慮した最適設計問題を、コンプリメンタリーエネルギー最小化によるトラスの解析方法およびＳＬＰ法を用いて解く方法について基礎的研究を行ったものである。

2．最適化問題の定式化

設計変数として各部材の断面積A、目的関数としてトラスの全重量W、制約条件として各部材の応力度σおよび任意の可動節点変位δに関する制約条件を考慮すると、応力度と変位の制約のもとでトラスの全重量を最小にする設計問題は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad A=[A_1,\cdots,A_n]^T \ , \ \text{which} \\ &\text{minimize} \quad W=\sum_{i=1}^{n} \rho_i \ell_i A_i, \quad \text{subject to} \quad \sigma^L \leqq \sigma \leqq \sigma^U,\ \delta \leqq \delta^U,\ A^L \leqq A \leqq A^U \end{aligned} \tag{1}$$

ここに、$\sigma=[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]^T$，$\delta=[\delta_1,\cdots,\delta_p]^T$,　n：部材数,　p：変位の着目点の数
ρ_i：部材iの単位体積当りの目的関数値,　ℓ_i：部材iの部材長,　添字L，U：上限及び下限

3．近似線形計画問題の導入

式(1)の最小化問題は、目的関数が設計変数Aに関して線形、制約条件が設計変数に関して非線形であるので、本研究では、逐次線形計画法を用いて解くこととした。応力度σと変位δをA^0においてTaylor展開し、一次の項までで近似すると、式(1)の設計問題は次式のように近似される。

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad \Delta A \ , \ \text{which} \\ &\text{minimize} \quad W=\sum_{i=1}^{n} \rho_i \ell_i \Delta A_i \\ &\text{subject to} \quad \sigma^L \leqq \sigma^0+\nabla\sigma^{0T}\Delta A \leqq \sigma^U, \quad \delta^0+\nabla\delta^{0T}\Delta A \leqq \delta^U, \quad \Delta A^L \leqq \Delta A \leqq \Delta A^U \end{aligned} \tag{2}$$

ここに、$\Delta A=A-A^0$,　σ^0，δ^0：A^0におけるσ及びδの値,　$\nabla\sigma^0$，$\nabla\delta^0$：点A^0における応力度および変位の設計変数に関する一次の偏微分係数マトリックス,

本研究では、ΔAの上限および下限、ΔA^LおよびΔA^Uを次式のように設定した。

$$\Delta A^L=\min\begin{cases}-\xi A^0 \\ A_{min}-A^0\end{cases}, \qquad \Delta A^U=\xi A^0 \qquad (\xi \geqq 0)$$

ここに、ξはΔAの一回の改良における大きさを規制する move limit であり、本研究ではAの収束状況をみながら逐次ξの幅を小さくすることにより最適解を決定することができた。また、A_{min}は、許容最小断面積であり、本研究では 0.1cm² とした。

4．コンプリメンタリーエネルギー最小化による部材力および偏微分係数の算定

本研究では、式(2)におけるσ^0および$\nabla\sigma^0$を計算するために必要となる各部材の部材力Nを、次式に示す全コンプリメンタリーエネルギーΠ_Cを最小化する問題を解くことにより求めている。

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad N, \quad \text{which} \\ &\Pi_C(N,\ A)\rightarrow \min\ , \qquad \text{subject to} \quad g=F-CN=0 \end{aligned} \tag{3}$$

ここに、$g=[g_1,\cdots,g_m]^T$（m：自由度の数）：各可動節点における釣合条件式、
$N=[N_1,\cdots,N_n]^T$：部材力ベクトル、$F=[F_1,\cdots,F_m]^T$：外力ベクトル、
C：NのF方向への変換マトリックス.

部材の応力度σの部材の断面積A_jに関する偏微分係数は、部材断面の初期値A^0における各部材の部材力N^0および部材jの断面積のみをΔA_jだけ変化させて再解析を行い、得られた部材力N^jを用いて次式より

求められる。

$$\partial \sigma_i/\partial A_j = (N_i^j/A_i - N_i^0/A_i)/\Delta A_j = (\sigma^j{}_i - \sigma^0{}_i)/\Delta A_j \tag{4}$$

5．エネルギー原理に基づく変位および偏微分係数の算定

エンゲッサーの第一定理によれば、材料の応力度−ひずみ関係の線形性、非線形性に関係なく、構造物の着目点kの着目方向の変位は、構造物の最小化された全コンプリメンタリーエネルギーΠ_c^*の着目点kの着目方向の力に関する偏微分係数として求めることができる。

$$\delta_k = \partial \Pi_c^* / \partial P_k \tag{5}$$

ここに、δ_k：着目点kの着目方向の変位，Π_c^*：構造物の最小化された全コンプリメンタリーエネルギー，P_k：着目点kの着目方向の力.

本研究では、式(5)のΠ_c^*の偏微分係数を次の中央差分の式により求めている。

$$\delta_k \fallingdotseq (\Pi^*_{c,\,Pk} - \Pi^*_{c,\,(-Pk)})/2\Delta P_k \tag{6}$$

ここに、$\Pi^*_{c,\,Pk}$：原荷重に着目点kの着目方向に仮想荷重ΔP_kを加えた荷重状態における最小コンプリメンタリーエネルギー，　$\Pi^*_{c,\,(-Pk)}$：原荷重にΔP_kと逆の方向に仮想荷重を加えた荷重状態における最小コンプリメンタリーエネルギー，

部材断面積A_jに関する変位δ_kの偏微分係数は、断面積の初期値A^0における変位δ_k^0および部材ｊの断面積のみをΔA_jだけ変化させた場合の変位δ_k^jを式(6)により求めることにより次式で計算される。

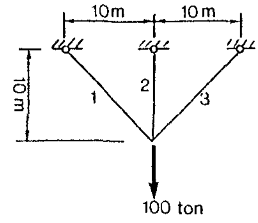
$$\partial \delta_k/\partial A_j = (\delta_k^j - \delta_k^0)/\Delta A_j \tag{7}$$

6．最適設計例及び考察

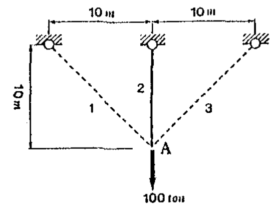
上で述べた方法により、図-3のような応力度−ひずみ関係を有する材料よりなる図-1に示す3部材トラスの最適化を行った結果を表-1に示す。また、参考までに、著者らがこれまでに研究しているコンプリメンタリーエネルギー最小化による解析アルゴリズムに、全応力制約を加えた最適設計法(CEM)、及び応力度の制約条件のみを考慮し感度係数とLPを用いた最適設計法(感+LP)により最適化を行った結果をも表-1に示す。図-2はトラスの最適解での形状で、点線で示した部材は最適解において不要となる部材を示している。

表-1より明らかなように、CEM および 感+LP により得られた全応力制約のもとでの最適解では、必要部材2の断面積が33.2cm²となり、点Aの変位が11.0cmとなっている。本論文の方法では、応力度の上限に加えて点Aの変位を10.0cmに制限した結果、9回の改良の反復により必要部材2の最適断面積として34.4cm²を得、変位制限を限度一杯に満足する解が得られた。応力的にはσ_2=2900.1kg/ cm²と余裕のある構造となっている。

本論文の方法では、応力度および変位の偏微分係数をきわて容易に計算することができ、非線形材料よりなる構造物の最適設計法としてきわめて有効な方法となることが明らかとなった。



図−1　3部材トラス

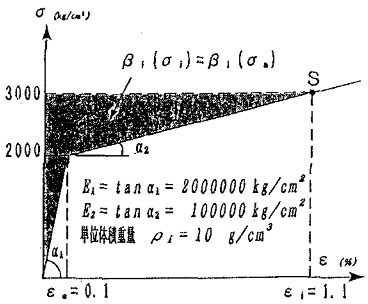


図−2　最適解での形状

表−1　3部材トラスの最適解

		断面積 (cm²) / 応力度 (kg/cm²) 部材1	部材2	部材3	点Aのたわみ (cm)	activeな制約条件	重量 (X10kg)	ITE[3] (回)	CPU[4] (秒)
設計条件	初期値	10.0	10.0	10.0	………	………	………	………	………
		3485.4	5070.9	3485.4					
δ_a=10cm σ_a=3000kg/cm² 応力+変位制約	本方法	0.1	34.4	0.1	10.0	$\delta=\delta_a$	34.65	9	5.4
		2400.0	2900.1	2400.0					
σ_a=3000kg/cm² 全応力制約のみ	[1] CEM	0.1	33.2	0.1	11.0	$\sigma=\sigma_a$	33.50	25	2.0
		2444.4	3000.0	2444.4					
σ_a=3000kg/cm² 応力制約のみ	[2] 感+LP	0.1	33.2	0.1	11.0	$\sigma=\sigma_a$	33.50	5	2.1
		2450.3	3000.0	2450.3					

1)コンプリメンタリーエネルギー最小化による解析アルゴリズムに、全応力制約を加えた最適設計法
2)感度係数およびLPを用いた最適設計法　3)最終解を得るために要した繰り返し回数
4)MX2000による計算時間



図−3　非線形材料の応力度−ひずみ関係

(参考文献)　大久保　他，土・学・論，第374号　PP.427〜436.

F.Engesser,Ueber statisch unbestimmte Trager・・・,Z.Architekten Ing.,vol.35,Hannover,1889.