

伝達マトリックス法による板構造の曲げ解析について

愛媛大学工学部
愛媛大学工学部
徳山 高 専

正 員 大賀水田生
学 生 ○辻畠 雄二
正 員 重松 恒美

1. まえがき

薄肉断面部材の曲げ解析は、一般に有限要素法や有限帯板法などを用いて行われているが、これらの解析法により薄肉断面部材全体の曲げ解析を精度良く行うためには、自由度が多くなり、それに伴って計算容量及び計算時間が膨大となり、容易に解析できないのが現状である。そこで本研究では、これらの解析法と比較して解析理論が簡単で、かつ小さな計算機容量で解析できる伝達マトリックス法を用い、板構造の曲げ解析プログラムを開発するとともに、簡単な数値計算を行い、本解析法の解の精度及び収束状態などの基本的な特性について検討した。

2. 伝達マトリックス法による板構造の曲げ解析理論

1) 格間伝達マトリックスの誘導 板要素の断面力-歪関係式、歪-変位関係式及び断面力の釣合式より得られる状態量 Z に関する一階の偏微分方程式において、相対する辺が単純支持されていることを考慮し、状態量の一方成分を三角関数で置き換えることにより、次のような一階の常微分方程式が得られる。

$$dZ/dy = A \cdot Z, \quad Z = \{w, \psi_y, M_y, V_y, v, u, N_y, N_x, \gamma, 1\}^T \quad \dots\dots\dots (1)$$

式(1)を数値積分することにより、格間伝達マトリックス F が次のように得られる。

$$Z = \exp(Ay) \cdot Z_0 = F \cdot Z_0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

2) 座標変換マトリックスの誘導 図-1に示すような板パネルで構成される板構造では、各板パネルの座標系が異なり、各板パネルの接合線上での状態量を関係づけるために座標変換マトリックス R を導入する必要がある。図-1において、板パネルⅢ及びⅣは節点3で互いに角度 θ で接合されており、節点3の左右での状態量 Z_3^R 、 Z_3^L の間には次の関係が存在する。

$$\begin{aligned} v_3^R &= v_3^L \cdot \cos\theta + w_3^L \cdot \sin\theta, & \psi_{y3}^R &= \psi_{y3}^L \\ w_3^R &= w_3^L \cdot \cos\theta - v_3^L \cdot \sin\theta, & u_3^R &= u_3^L \\ N_{y3}^R &= -N_{y3}^L \cdot \cos\theta + V_{y3}^L \cdot \sin\theta, & M_{y3}^R &= M_{y3}^L \\ V_{y3}^R &= V_{y3}^L \cdot \cos\theta + N_{y3}^L \cdot \sin\theta, & N_{x3}^R &= N_{x3}^L \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

または、

$$Z_3^R = R \cdot Z_3^L, \quad R: \text{座標変換マトリックス} \quad \dots\dots\dots (4)$$

3) 荷重の取扱方法 図-2に示すように節点2に荷重が作用している場合、節点2での右側状態量 Z_2^R は、左側状態量 Z_2^L に荷重による成分を加えることにより、次のように表される。

$$Z_2^R = Z_2^L + \{0, 0, \bar{M}, \bar{V}, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \quad \dots\dots\dots (5)$$

なお、荷重成分 $\bar{M}$ 、 $\bar{V}$ はそれぞれ次のように与えられる。

i) 等分布荷重 本解析プログラムでは、荷重は節点にのみ作用するものとしており、等分布荷重の場合の等価節点荷重は次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{V} &= -\frac{qb}{a} \left(\cos \frac{m\pi}{a} x_1 - \cos \frac{m\pi}{a} x_0 \right) \\ \bar{M} &= -\frac{qb^2}{6a} \left(\cos \frac{m\pi}{a} x_1 - \cos \frac{m\pi}{a} x_0 \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 q : 分布荷重、 a : 板構造の長さ、 x_0, x_1 : 荷重が作用する奥行き方向の始点、終点座標、 b : 節点間の板幅

ii) 集中荷重

$$\bar{V} = \frac{2P}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 P : 集中荷重、 x_0 : 荷重の作用する x 座標

4) 計算手順 求めた格間伝達マトリックス及び座標変換マトリックスを用い、上で示した荷重の取扱方法を導入することにより、板構造の両端での状態量を関係づける伝達式が次のように得られる。(図-2参照)

$$Z_4 = F_4 \cdot R_3 \cdot F_3 \cdot R_2 \cdot F_2 \cdot R_1 \cdot F_1 \cdot Z_0 = U \cdot Z_0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

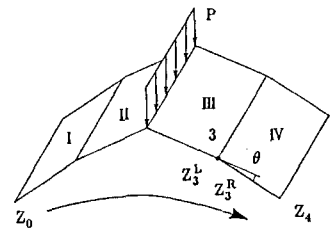


図-1 板構造

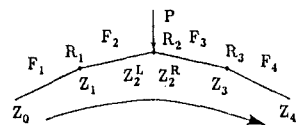


図-2 折板断面

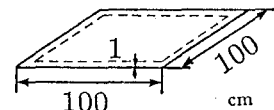


図-3 四辺単純支持板

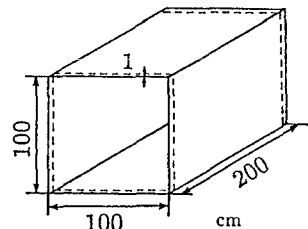


図-4 箱型断面部材

ここで、両端での境界条件を考慮し、荷重項を右辺に移行することにより次式が得られる。

$$U' \cdot Z_0' = U_i' \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 U' :係数マトリックス、 U_i' :荷重項ベクトル

この初期未知状態量 Z_0' に関する連立一次方程式(9)を解き Z_0' を求め、再び初期状態量 Z_0' を伝達させることにより、各節点での状態量 Z を求める。調和項ごとに上記の操作を繰り返し行い、求めた各調和項に対する状態量を加算する。

3. 解の収束状態の検討

本解析法の解の収束状態を検討するため、図-3,4に示す四辺単純支持板及び箱型断面部材が等分布及び集中荷重を受ける場合について解析を行った。なお数値計算での最大調和項数は $m=30$ とした。

1) 四辺単純支持板での検討

図-5に Z 方向変位 w 及び曲げモーメント M_y の収束状態を調和項数 $m=30$ での値との誤差を縦軸にとり示している。集中荷重の場合、等分布荷重の場合に比較して若干収束状態が悪くなっているが、いずれの荷重においても少ない調和項数で収束しており、調和項数 $m=3$ での変位及び曲げモーメントの誤差は等分布荷重の場合、0.1%及び0.08%、集中荷重の場合0.2%及び2.1%となっている。

2) 箱型断面部材での検討

図-6に Z 方向変位 w 及び曲げモーメント M_y の収束状態を示している。四辺単純支持板の場合に比較して若干収束状態が低下しているものの、解はいずれの荷重においても少ない調和項数で収束しており、調和項数 $m=3$ での変位及び曲げモーメントの誤差は等分布荷重の場合、0.9%及び1.5%、集中荷重の場合4.0%及び6.5%となっている。

4. 数値計算例及び考察

四辺単純支持板(図-3)及び箱型断面部材(図-4)に分布及び集中荷重が作用する場合の解析を行い($m=30$)、四辺単純支持板の場合は理論値と、箱型断面部材の場合は有限要素法(72ele)による結果との比較を行った。図-7及び8に得られた変形図、及び中央断面での変形曲線の比較を示している。本解析法により得られた四辺単純支持板での結果は、いずれの荷重においても理論値と0.8%以内の誤差で一致している。また、箱型断面部材での結果は有限要素法による結果と2.3%以内の誤差で一致している。

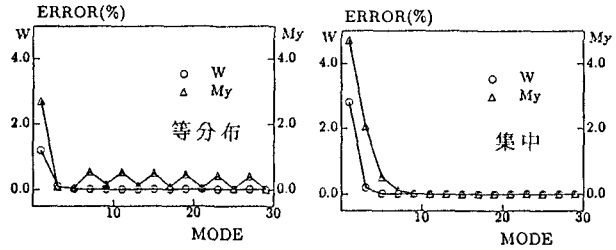


図-5 解の収束状態(板)

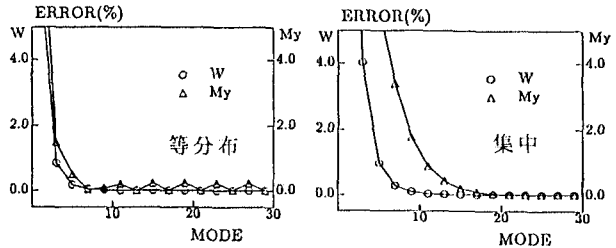


図-6 解の収束状態(箱型)

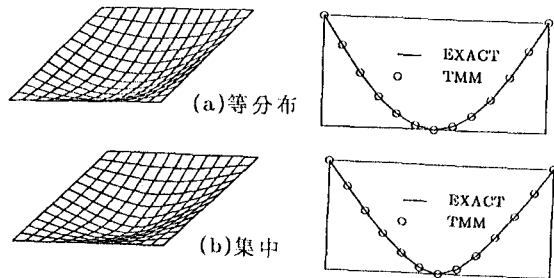


図-7 変形形状及び変形曲線(板)

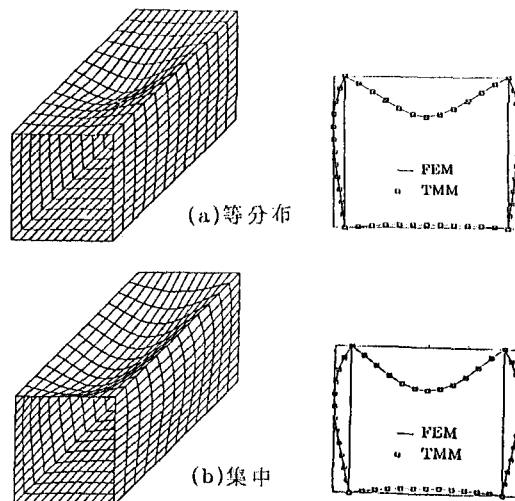


図-8 変形形状及び変形曲線(箱型)