

MacCormack法を用いた開水路不定流計算

徳島大学工学部 正 員 岡 部 健 士
徳島大学大学院 学生員 〇高 橋 邦 治

1. まえがき: MacCormack法は、Two-Step Lax-Wendroff法の一様とも考えられる時・空間的に2次の精度を持つ差分スキームであるが、後者とは異なり、時・空間格子の midpoint における水理量の計算を含まないので、数値拡散が小さく、急激な流れの変化をより的確に計算し得るように思われるとともに、アルゴリズムも比較的単純なことから、今後の発展に期待が寄せられている^{1)・2)}。

本報告では、水抜き孔を有する砂防ダムの上流域で流量の低減とともに発達する架空の浸食流路を想定し、その過程における不定流の追跡計算にMacCormack法を適用した計算例を紹介しつつ、常流・射流の遷移および河床変動を伴う流れへの本法の適用性ならびに適用上の問題点について検討を加える。

2. 基礎式およびアルゴリズム:

1次元開水路不定流の連続式と運動方程式を保存形式で記述すると下記のようなものである。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1), \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{Q^2}{A} \right\} = g A (i - i_f) \quad (2)$$

ここに、 t : 時間、 x : 流れ方向の座標、 A : 流積、 Q : 流量、 P : 流れの断面に作用する合圧力、 i : 水路床勾配、 i_f : 摩擦損失勾配、 ρ : 流水の密度、 g : 重力の加速度、である。なお、 i_f は、抵抗則としてManning式を用いる場合、 $i_f = n^2 Q^2 / (A^2 R^{4/3})$ (3)

のように表される。ただし、 n : Manningの粗度係数、 R : 径深、である。

以下、MacCormack法のアルゴリズムについて説明を加えるが、記述を簡単にするために、(1)および(2)式をベクトルの形式で表示し直すと次式のようなになる。

$$\partial U / \partial t + \partial F / \partial x = S \quad (4)$$

ただし、

$$U = \begin{Bmatrix} A \\ Q \end{Bmatrix} \quad (5-a), \quad F = \begin{Bmatrix} Q \\ P/\rho + Q^2/A \end{Bmatrix} \quad (5-b), \quad S = \begin{Bmatrix} 0 \\ g A (i - i_f) \end{Bmatrix} \quad (5-c)$$

さて、時・空間平面を Δt および Δx の間隔の格子で被い、格子点の t 方向および x 方向の番号をそれぞれ n および j とするとき、(4)式に対するMacCormack法の基本式は、例えばつぎのように書かれる³⁾。

$$(\text{予測子段階}) \quad \bar{U}_j = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (F_{j+1}^n - F_j^n) + (E_{j+1} - E_j) \} + \Delta t S_j^n \quad (6)$$

$$(\text{修正子段階}) \quad U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (\bar{U}_j + U_j^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} \{ (\bar{F}_j - \bar{F}_{j-1}) - (E_j - E_{j-1}) \} + \frac{\Delta t}{2} \bar{S}_j \quad (7)$$

すなわち、MacCormack法では、 $t = n \Delta t$ の解より $t = (n+1) \Delta t$ の解を求めるに当たり、まず、時間ステップを Δt とした最も単純な差分法で粗い近似を行い (予測子段階)、ついで、その結果 ($\bar{}$ を付して区別) を用い、時間ステップを $\Delta t/2$ とした差分計算を行って、より精度の高い解を求める (修正子段階)。(6)および(7)式における空間差分の方向は入れ替えてもよい。なお、最上流端および最下流端の断面においては、本法による計算が不可能となったり、両者における境界条件を考慮する必要があるために、ボックス型など本法とは別の差分スキームが導入される。また、(6)、(7)式中の E_j は、流れの遷移断面における中立安定が不安定に発展するのを防ぐために付す必要がある高次の人工粘性項である。人工粘性項として特に指定された形式はないが、次項で紹介する計算においては、次式を用いた。

$$E_j = K R_j (Q_j / A_j) \cdot (U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}) / (2 \Delta x) \quad (8)$$

ここに、 K : 経験的に定める係数である。

3. 計算例ならびに考察: 本文では実験室スケールの流れへの適用例を示す。すなわち、幅0.5mの長方形断面水路に水抜き孔付きのダムモデルとその上流に続く一定勾配 $i_0 = 1/200$ の平坦な移動床を作り、

当初は定常等流を通水しておいたのち、上流からの給水量 Q_{in} を図-1に示すように急減させることによりダム上流に浸食流路を発生させた場合を想定した。ただし、流路断面形状は、 Q_{in} が変化する間のみ(9)式のように変化するものと仮定し、流れについてのみ計算を実行した。

$$z(t, x', y) = 0.2 + i_0 x' - \frac{t}{1000} \left(\frac{4-x'}{4} \right)^2 \{ 1 + \cos(\pi \frac{y-y_c}{y_c}) \} \quad (9)$$

ただし、 z :砂面高さ、 x' :下流端からの距離、 y :横断方向の座標値、 y_c :水路中心線の y 値、である。

水抜き孔の断面積には 16cm^2 、流量係数には 0.7 を与え、接近流速を無視して流出流量を算定した。また、流路の n は 0.02 、 Δx は 0.1m とし、 Δt はCFL条件により決定した。

(8)式の K を 0.3 とした計算結果を図-2に示す。フルード数の図より明らかなように、流れは支配断面および跳水を伴い、とくに後者の発生位置は大きく移動するが、このような場合においても十分に安定した解が得られている。ただし、流れが定常状態に極めて近くなると、下流端付近に奇妙な上に凸の水面形状が現れている。その原因は、下流端の断面に対して用いたボックススキームとMacCormack法との不整合にあるとも推察されるが、現段階では判然としない。なお、詳細は省略するが、 K の値を上記のものから大幅に変化させると解の不自然さや不安定が著しくなる。

4. あとがき： 以上、一部にノウハウ上の問題は残されているけれども、河床変動と流れの遷移が共存する条件下での不定流計算にもMacCormack法がある程度有用であることを示した。しかし、計算精度の問題については全く議論できなかったのので、今後、実験値などとの比較を通してさらに検討を重ねるつもりである。

[参考文献]

- 1) 崇田徳彦・清水康行・北條紘次: MacCormack法を用いた不定流計算, 第45回土木学会年講, II-190, pp. 432~433, 1990.
- 2) 潮田智道・河村三郎・中谷剛: 保存則系差分法のスキームの特性に関する考察, 第45回土木学会年講, II-193, pp. 438~439, 1990.
- 3) 日本機械学会編: 流れの数値シミュレーション, 第2章, 1989.

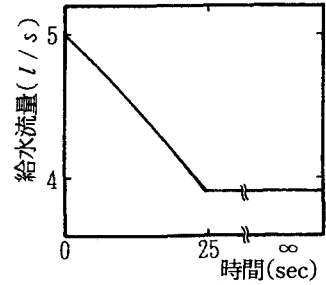


図-1 給水流量変化

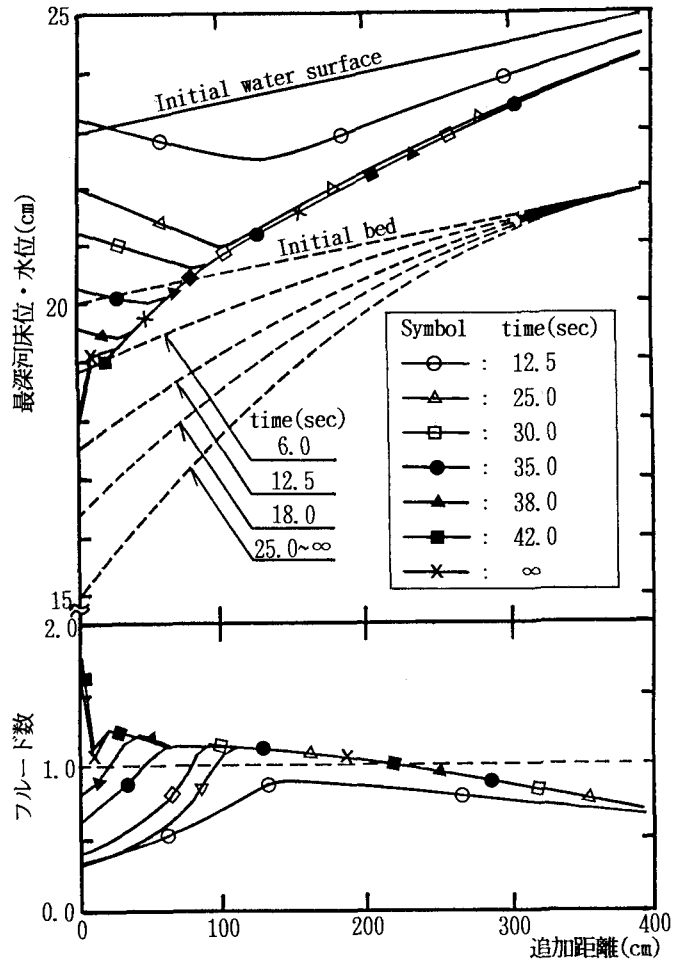


図-2 計算結果