

河川水質モデルにおける拡散の取扱いに関する一考察

山口大学工学部 正員 関根雅彦 浮田正夫 中西弘
新井組 正員 ○ 豊田尚久

1. はじめに

発表者らはこれまで、河川における汚濁物質の挙動を定量的に把握するため、数理計画法を用いた係数探索で河川水質モデルの計算値を実測値に適合させることによりモデルの係数値を求めようとしてきた¹⁾。本法では1回の探索に数百回も20～50日にわたる水質シミュレーションを繰り返すため、モデル計算に要する時間は少しでも短い方がよい。このため、基礎式のボックス可変分割ラグランジュ型差分法を提案した²⁾。これまでの研究では1日1回の実測値を用いたため、拡散を無視した基礎式で十分であった。しかし、本法を1時間毎の実測データに適用する場合には、拡散を無視することはできない。本報告では、基礎式に拡散を含みながらできるだけ計算時間が短くなる手法について考察した。

2. 実測拡散係数の取扱い

水質シミュレーションを行う1時間毎水質データは宇部市真締川のものである。モデル対象区間を図1に示す。この区間における拡散係数を得るため、図1 調査区間（区間1、2とも途中流入はない）上流・中流採水点から食塩水を放流し、中流・下流採水点で塩素イオン濃度を連続的に測定した。この結果に対して拡散による濃度変化を解析的に表現した(1)式を適用することにより、拡散係数Dを得た。

$$C = R_s \cdot M \cdot \exp \left\{ -L^2 / (4 \cdot D \cdot t) \right\} / (2 \cdot A_s \cdot \sqrt{\pi \cdot D \cdot t}) \quad (1)$$

ここに、C：測定点における塩素イオン濃度[mg/l]、M：塩素イオン投入量[mg/l]、D：拡散係数[m²/hr]、t：塩素イオン投入からの経過時間[hr]、R_s：塩素イオン回収率[-]、A_s：流路断面積[m²]、L：塩素イオン投入点から測定点までの距離[m]である。この調査を異なる流況に対して計3回実施し、(2)式を用いて無次元化拡散係数dを得た。

$$d = D / (u_* \cdot h) \quad (2)$$

ここに、u_{*}：摩擦速度[m/hr]、h：平均水深[m]である。Dとu_{*}・hの関係および得られたdを図2に示す。u_{*}はエネルギー勾配と径深（≒水深）で表現されるため、計算上の単位時間である1時間のあいだ調査区間の流況が均一で定常状態であると仮定すれば、任意の流況における平均水深と河床勾配から(2)式を用いてその時のDを逆算することができる。

3. 既存の基礎式の問題点

2.で述べた拡散係数を数値計算で利用するにあたっては、数値拡散の問題を考慮する必要がある。数値拡散とは、基礎式の差分化誤差により、数値計算上の拡散係数を0としても見かけ上拡散が存在するかのような計算結果が得られる現象である。このため、一般

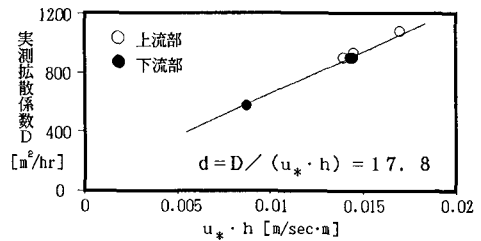
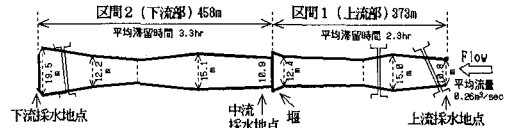
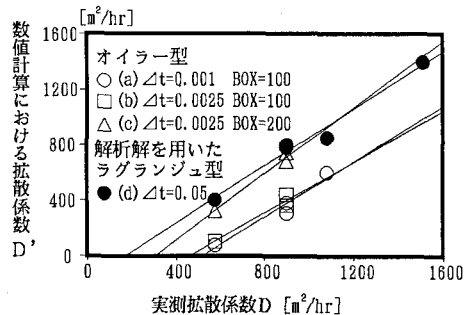
図2 実測拡散係数とu_{*}・hの関係

図3 DとD'の関係

に用いられるオイラー型差分式では、数値計算に用いる拡散係数 D' は実測拡散係数 D より小さな値となるのが普通である。食塩放流実験時の実測拡散係数 D と、採水点の塩素イオン濃度計算値が実測値に合致するように求めた数値計算上の拡散係数 D' の関係を図3の(a)(b)(c)に示す。図3より、BOX数が100の場合、実測拡散係数が約500[m²/hr]以下の領域では、拡散が正当に表現できないことがわかる。ところが、低流量時に滞留しがちな真綿川下流部では、 D が200程度になる場合がある。このような場合に拡散条件を満足させるためには、 $\Delta t = 0.0025$ 、BOX数を200としなければならない、計算時間が極端に長くなってしまふ。

一方、前回提案したラグランジュ型差分式に拡散項を取り入れた定式化では、図4の(b)線に示されるように $D' = D$ でも拡散が不足した。この問題は移流におけるC.F.L条件と同様、拡散による物質移動がBOXの範囲を越えているにもかかわらず、計算上拡散の影響は隣接するBOXにしか及ばないとことから生じると考えられる。

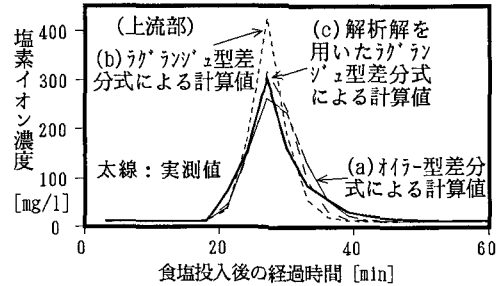


図4 差分式の違いによる計算結果の変化
※計算に用いた拡散係数は実測値と同じ1512[m²/hr]

4. 解析解を用いたラグランジュ型差分化

今回提案する「解析解を用いたラグランジュ型差分式」を、オイラー型差分式、ラグランジュ型差分式とともに表1にまとめる。本法はラグランジュ型であるため移流にともなう数値拡散誤差を避けることができ、拡散の解析解を用いることにより拡散の影響が隣接BOXにしかおよばないという不都合もない。これにより図4の(c)線に示すように、実測値と同じ D' を用いて計算することができた。本法を用いた D と D' の関係を図3の(d)に示しているが、 $\Delta t = 0.05$ でもオイラー型差分式における $\Delta t = 0.0025$ 、ボックス数200と同等の結果を得た。これにより、計算時間はおおよそ1/20に短縮された。

表1 本報告で使用了基礎式(差分表示)

5. おわりに

解析解を用いたラグランジュ型差分化により計算時間を大幅に短縮することができた。本手法は小流量時に滞留部が生じやすい都市小河川の水質シミュレーションに有効であると考えられる。

<参考文献>1)関根他：衛生工学研究論文集(23)p.85(1987)

2)関根他：第40回土木学会中国四国支部研究発表会講演要集,p.218(1988)

(a) オイラー型差分式			
$Cs(i,j) = Cs(i,j-1) + \frac{\Delta t}{V} \left\{ Q \cdot Cs(i-1,j-1) - Q \cdot Cs(i,j-1) + Difs + Lsa - Lsa + Lds - Lsd - Ls0 \right\}$	$Cd(i,j) = Cd(i,j-1) + \frac{\Delta t}{V} \left\{ Q \cdot Cd(i-1,j-1) - Q \cdot Cd(i,j-1) + Difd + Lsd - Lds + Lad - Lda - Ld0 \right\}$	$Ca(i,j) = Ca(i,j-1) + \frac{\Delta t}{A} \left\{ Lsa - Lsa + Lda - Lad - La0 \right\}$	$Difs = D' \cdot \frac{Cs(i-1,j-1) - 2 \cdot Cs(i,j-1) + Cs(i+1,j-1)}{\Delta x^2} \cdot V$ (ただしpはsまたはd)
(b) ラグランジュ型差分式			
$Cs(i,j) = \frac{\Delta t}{V} \left\{ Q \cdot Cs(i-1,j-1) - Q \cdot Cs(i,j-1) + Difs + Lsa - Lsa + Lds - Lsd - Ls0 \right\}$	$Cd(i,j) = \frac{\Delta t}{V} \left\{ Q \cdot Cd(i-1,j-1) - Q \cdot Cd(i,j-1) + Difd + Lsd - Lds + Lad - Lda - Ld0 \right\}$	$Ca(i,j) = Ca(i,j-1) + \frac{\Delta t}{A} \left\{ Lsa - Lsa + Lda - Lad - La0 \right\}$	$Difs, Difd$ はオイラー型差分式と同じ。 ※ $\Delta x = u \times \Delta t$ となるようにボックス分割する。
(c) 解析解を用いたラグランジュ型差分式			
$Cs(i,j) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^N \left\{ Cs(n,j-1) \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{n-1}{N} \right] \cdot \Delta x \cdot Dif(x, \Delta t) \right\} + \frac{\Delta t}{V} (Lsa - Lsa + Lds - Lsd - Ls0)$	$Cd(i,j) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^N \left\{ Cd(n,j-1) \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{n-1}{N} \right] \cdot \Delta x \cdot Dif(x, \Delta t) \right\} + \frac{\Delta t}{V} (Lsd - Lds + Lad - Lda - Ld0)$	$Ca(i,j) = Ca(i,j-1) + \frac{\Delta t}{A} \left\{ Lsa - Lsa + Lda - Lad - La0 \right\}$	(mはボックス数)
$Dif(x, \Delta t) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D' \cdot \Delta t}\right)}{2 \Delta x \sqrt{\pi \cdot D' \cdot \Delta t}}$ ※ $\Delta x = u \times \Delta t$ となるようにボックス分割する。			
記号の説明			
$Lsd = ksd \cdot Cs(i,j-1) \cdot V$ $Lad = kad \cdot Ca(i,j-1) \cdot A$ $La0 = ksa0 \cdot Ca(i,j-1)$	$Lds = kds \cdot Cd(i,j-1) \cdot V$ $Lsa = ksa \cdot \tau \cdot A$	$Lsa = ksa \cdot Cs(i,j-1) \cdot V$ $Ls0 = ksa0 \cdot Cs(i,j-1) \cdot V$	$Lds = kds \cdot Cd(i,j-1) \cdot V$ $Ld0 = kd0 \cdot Cd(i,j-1) \cdot V$
$Cs(i,j), Cd(i,j), Ca(i,j)$: Box i, 時間ステップjにおける懸濁物質濃度[g/m ³], 溶解物質濃度[g/m ³], 堆積量[g/m ²] Lpq : ボックス内部物質移動量[g/hr] kpq : 係数[1/hr] (kps は[g/(m ^{1/2} ・s ^{1/2})/hr]) (p, q = s, d, a, 0. sは懸濁状態, dは溶解状態, aは堆積物, 0は分解を意味し, pからqへの物質移動/変化を表している。) Δx : iボックス流下距離[m] Δt : 時間ステップ[hr] V : Box内水量[m ³] D' : 数値計算上の拡散係数[m ² /hr] A : 河床面積[m ²] As : 流路断面面積[m ²] m : ボックス数 但し計算の結果、 Δt 後のCs, Cd, Caの存在量が負になってしまう場合、存在量は0とし、不足分は負となった形態から他の形態に移行したの中からの量に応じて差し引く。			