

コンプリメンタリーエネルギー最小化によるトラスの最適設計法について

愛媛大学工学部 正 会 員 大久保 禎二
愛媛大学大学院 学生会員 〇林 英 範

1. まえがき

本研究は、トラス構造物のすべての部材が弾性限度を越えた同一の応力レベルで同時に fully stress 状態になり崩壊する場合の最適設計問題を、コンプリメンタリーエネルギー最小化による材料非線形解析アルゴリズムを利用して解く方法について基礎的な検討を行ったものである。

2. コンプリメンタリーエネルギー最小化に基づく最適設計問題の定式化

断面積 $A = [A_1, \dots, A_n]^T$ (n : 部材数) を有するトラス構造物の部材力 P を、材料の非線形性を考慮して全コンプリメンタリーエネルギー Π_C を最小化することにより決定する問題は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \text{find } P, \quad & \text{such that} \quad \Pi_C(P, A) \rightarrow \min \quad (1) \\ & \text{subject to} \quad g = F - CP \end{aligned}$$

ここに、 $g = [g_1, \dots, g_m]^T$ (m : 自由度の数): 各可動節点における釣合条件式, $P = [P_1, \dots, P_n]^T$: 部材力ベクトル, $F = [F_1, \dots, F_m]^T$: 外力ベクトル, C : P の F 方向への変換マトリックス

また、トラス構造物の各部材の応力度が図-1の点 S である場合、部材 i のコンプリメンタリーエネルギー $\Pi_{Ci}(P_i, A_i)$ は次式で計算される。

$$\begin{aligned} \Pi_{Ci}(P_i, A_i) = & \frac{P_i^2 \ell_i}{2 E_1 A_i} & (\text{if } P_i \leq P_e) \\ & \frac{P_e \ell_i}{2 E_1 A_i} (2 P_i - P_e) + \frac{(P_i - P_e)^2 \ell_i}{2 E_2 A_i} & (\text{if } P_i > P_e) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 ℓ_i : 部材 i の部材長, A_i : 部材 i の断面積

一方、部材 i およびトラス全体の重量や製作費などの目的関数 $W_i(A_i)$ および W は次式で表わされるものとする、

$$W_i(A_i) = \rho_i \ell_i A_i, \quad W = \sum_{i=1}^n W_i(A_i) \quad (3)$$

トラス構造物の最適設計問題は、式(1)を解きつつ、 $\sum W_i(A_i)$ を最小にする問題を解くことになる。

式(2)および式(3)を A_i に関して調べてみると、断面積 A_i が増加するとコンプリメンタリーエネルギー $\Pi_{Ci}(P_i, A_i)$ は単調に減少するが、目的関数 $W_i(A_i)$ は単調に増加することとなり、これらの関係のみからは、一般に $\Pi_{Ci}(P_i, A_i)$ の最小化と目的関数 $W_i(A_i)$ の最小化は断面積 A に関して相矛盾した関係にあるようにみえる。

3. 最適設計問題の変換

ところで、部材 i のコンプリメンタリーエネルギー Π_{Ci} は、図-1に示すコンプリメンタリーエネルギー密度 β_i を用いて次式で表わされる。

$$\Pi_{Ci}(\sigma_i) = \beta_i(\sigma_i) \ell_i A_i \quad (4)$$

一方、部材 i の目的関数 W_i は

$$W_i = \rho_i \ell_i A_i \quad \text{ここに、} \rho_i: \text{部材 } i \text{ の単位体積当りの目的関数値} \quad (5)$$

であるので $A_i = W_i / \rho_i \ell_i$ となり、これを式(4)に代入することにより $\Pi_{Ci}(\sigma_i)$ は次式のように表わされる。

$$\Pi_{Ci}(\sigma_i) = \beta_i(\sigma_i) W_i / \rho_i \quad (6)$$

本研究では、 ρ_i および $\beta_i(\sigma_i) [= \beta(\sigma_e)]$ を一定としているので、式(6)より $\Pi_{Ci}(\sigma_i) [= \Pi_{Ci}(\sigma_e)]$ と W_i とは比例関係にあることがわかる。すなわち、

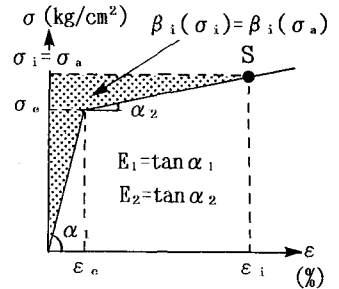


図-1 応力-ひずみ関係

$$\Pi_{ci}(\sigma_i) \propto W_i$$

(7)

上の展開より明らかなように、本研究で対象としているトラス構造物の最適設計問題では、トラスの目的関数 W は、トラスの全コンプリメンタリーエネルギー $\Pi_c(\sigma_a)$ と比例しているので、式(1)において $\sigma_i = P/A = \sigma_a$ の条件、すなわち $A_i = P_i/\sigma_a$ の条件を満足させながら $\Pi_c(P, A)$ を最小化することにより、 $W(A)$ も最小化されることとなる。従って、本研究で対象とするトラス構造物の最適設計問題を、次のような全コンプリメンタリーエネルギー最小化問題に変換することができる。

$$\begin{aligned} \text{find } P, \quad \text{such that } \Pi_c(P, A) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(P_i, A_i) \rightarrow \min \\ \text{subject to } g = F - CP \\ A_i = P_i / \sigma_a \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (8)$$

4. SQPによる最適設計アルゴリズム

式(8)の最小化問題は、これまでに著者らが開発している全コンプリメンタリーエネルギー最小化によるトラス構造物の非線形解析のアルゴリズムを用いて、図-2に示すフローチャートにより解くことができる。

5. 最適設計例および考察

2, 3, 4で述べた方法により種々の不静定トラスの最適設計を行ったが、ここでは図-3に示す3部材および6部材不静定トラスの最適化した結果を表-1に示す。なお、非線形材料として図-1における $E_1=2000000\text{kg/cm}^2$, $E_2=100000\text{kg/cm}^2$, $\sigma_a=2000\text{kg/cm}^2$ と仮定し、 $\rho_i=10\text{g/cm}^3$, $\sigma_a=3000\text{kg/cm}^2$ とした。

式(8)において、一回の反復改良における A の変化があまり大きくないため、最終的な最適解に収束するまでに必要とした P および A の反復回数は多くなり、3部材トラスでは25回、6部材トラスでは83回の P および A の反復改良により最適解が得られている。ただし、一回の反復改良に要する計算時間はきわめて少ないため、いずれの設計例においても、能率的に最終解を決定している。また、いずれのトラスにおいても最適解において不要となる部材の断面積はその下限値 0.1cm^2 に収束している。なお、本研究の方法により得られた最適解は、次に述べるLPの手法を用いた最適化の方法による最適解と完全に一致していることを確認している。

6. あとがき

本研究で述べた最適設計法は、これまでに著者らが開発してきた全コンプリメンタリーエネルギー最小化によるトラス構造物の材料非線形解析アルゴリズムをそのまま用いて、弾性限度を越えて非線形の応力状態にあるトラス構造物の最適設計を能率的に行える点に大きな特徴がある。今後はこの方法をさらに拡張し、たわみ制約や他の設計条件をも考慮した最適設計法に発展させる予定である。

表-1 各トラス構造物の最適値 (3および6部材トラス)

	断 面 積 (cm^2)						重量 ($\times 10$ kg)	1) ITE (回)	2) CPU (秒)
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6			
初期値	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0			
3部材	0.1	33.2	0.1	—	—	—	33.50	25	2.0
6部材	0.1	0.1	0.1	33.3	47.0	0.1	100.22	83	8.5

1) 最終解を得るために要した繰返し回数 2) MX2000による計算時間

参考文献 大久保 他, 土・学・論, 第374号 PP. 427~436

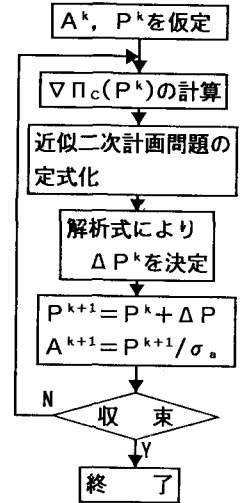


図-2 SQPによる最適化手順

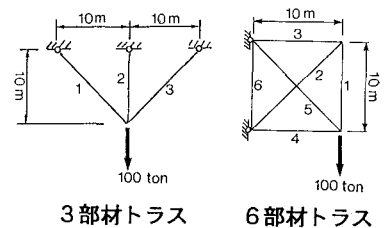
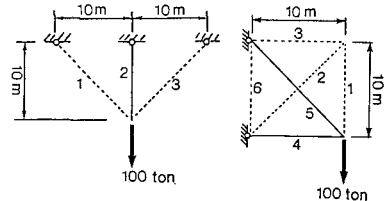


図-3 解析モデル



点線の部材は不要部材

図-4 改良後のトラス