はさみ込み法による
三径間連続格子桁の自由振動解析

鳥取大学　　正員　神部　俊一
横河橋梁（株）正員　○市川　章夫
住友建設（株）正員　山本　千秋

1．まえがき

同じ形態の構造部分が連鎖状に結合して構成される骨組構造物に還元法を適用すると、その自由振動特性を効率良く解析できる[1]。しかし、この場合には格間行列に含まれる双曲線関数の値が高次の振動数領域で著しく大きくなるために桁落ちが生じて、それが数値誤差の発生の原因となる。この誤差を低減するのに効果のある解析方法が還元法の変種である“はさみ込み法”[2]である。本報は、図－1に示す三径間連続格子桁にこの解法を適用して、その曲げ自由振動性状を明らかにする。

2．解析方法

1－1　格間行列と格点行列

単一部材の自由曲げ振動及びねじり振動を支配する微分方程式の一般解は、部材軸方向の座標をxとし、たわみをV、ねじり角をϕ、積分定数A_i (i=1,2,3,4)とすると、それぞれ、次式で与えられる。

$$V(\bar{x}) = A_1 \cosh\bar{\lambda}\bar{x} + A_2 \sinh\bar{\lambda}\bar{x} + A_3 \cos\bar{\lambda}\bar{x} + A_4 \sin\bar{\lambda}\bar{x} \tag{1}$$

ここに、

$$\bar{\lambda}^4 = \frac{m\,\omega}{EI}\,\ell^4\,,\quad \bar{x} = \frac{x}{\ell_0}\,, \tag{2}$$

EI：部材の曲げ剛性，　ω：固有円振動数，
m：部材の単位長さ当たりの質量，　ℓ：部材長

および、

$$\phi(\bar{x}) = A_5 \sin\bar{\mu}\bar{x} + A_6 \cos\bar{\mu}\bar{x} \tag{3}$$

ここに、

$$\bar{\mu} = \frac{m r^2 \omega^2}{GJ}\,\ell^2 \tag{4}$$

r：回転半径，　GJ：ねじり剛性

なお、上付きの横棒記号は対応する物理量が無次元量であることを示している。上式とその導関数とから、単一部材の格間行列と動的剛性マトリクスとを導くことができる。次に、図－2の分割された構造モデル(i)に着目する。単一部材の格間行列を並列する主桁に対応する様に集成して得られる格間行列$\mathbf{F}_i$を用いると、部分構造(i)の左端Lの状態量ベクトル$\mathbf{y}_{iL}$と右端Rの状態量ベクトル$\mathbf{y}_{iR}$とは、次式により関係付けられる。

$$\bar{\mathbf{y}}_{Ri} = \bar{\mathbf{F}}_i\,\bar{\mathbf{y}}_{Li} \tag{5}$$

ここに、

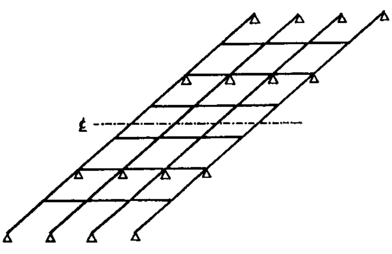
$$\bar{\mathbf{y}}_{Ri} = [\bar{\mathbf{u}}_{Ri}{}^T \mid \bar{\mathbf{S}}_{Ri}{}^T]^T\,,\quad \bar{\mathbf{y}}_{Li} = [\bar{\mathbf{u}}_{Li}{}^T \mid \bar{\mathbf{S}}_{Li}{}^T]^T \tag{6}$$

$\bar{\mathbf{S}}$：部分構造i における節点力を成分とする列ベクトル
$\bar{\mathbf{u}}$：部分構造i における節点変位を成分とする列ベクトル

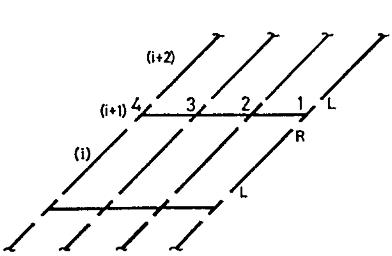
次に、図－3に示す部分構造i+1 の節点2における力ベクトルの状態図に着目する。まず、横桁の節点力ベクトルを横桁の剛性マトリックスと変位ベクトルとで表わして、節点において力の釣り合い式を立てる。この操作を各節点について行ない、さらに主桁と横桁との間に成り立つ変位の連続条件式を取入れると、格点に関する伝達式が格点行列を用いて次式により表わされる。

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_L \\ \hline \bar{\mathbf{S}}_L \end{bmatrix}_{i+2} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\mathbf{E}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \hline -\bar{\mathbf{K}} & -\bar{\mathbf{E}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_R \\ \hline \bar{\mathbf{S}}_R \end{bmatrix}_i \tag{7}$$

ここに、　$\bar{\mathbf{K}}$：横桁の剛性マトリックス，　$\bar{\mathbf{E}}$：単位行列



図－1　構造モデル



図－2　分割構造モデル

1－2　はさみ込み法による自由振動解析

図－1の構造モデルは対称構造物であるから、主桁に直交する対称軸から片側の半分を解析すれば充分である。 そこで、部分構造の両端から内側へ向けて還元法による通常の演算を進めていく。そして、格点3における状態量ベクトル$\overline{\mathbf{Y}}_{3L}$、$\overline{\mathbf{Y}}_{3R}$を算出し、それらの間に成立する変位の連続性と作用．反作用の法則に関係する条件式を“接続行列”を導入して求める。 なお、ここでは状態量の伝達区間をより短くするために前進代入法[3]を用いて格点1と5における初期状態量ベクトル$\overline{\mathbf{y}}_{5L}$、$\overline{\mathbf{y}}_{5R}$をそれぞれ格点2と4における変位ベクトル$\overline{\mathbf{u}}_{2L}$、$\overline{\mathbf{u}}_{4R}$に置き換えた。

$$\overline{\mathbf{Y}}_{3L}=\overline{\mathbf{N}}_{3L}\,\overline{\mathbf{u}}_{2L}, \quad \overline{\mathbf{Y}}_{3L}=\overline{\mathbf{N}}_{3L}\,\overline{\mathbf{u}}_{4R}+\overline{\mathbf{Q}}_{S}, \quad \overline{\mathbf{Y}}_{3L}=\overline{\mathbf{C}}_{0}\,\overline{\mathbf{Y}}_{3R} \tag{8$_{1\sim3}$}$$

ここに、$\overline{\mathbf{N}}_{iL}$，$\overline{\mathbf{N}}_{iR}$：境界行列と格間行列および格点行列の乗算の繰り返しにより求まる伝達行列

$\overline{\mathbf{Q}}_{S}$：中間支承の支点反力を成分とする跳躍ベクトル

$\overline{\mathbf{C}}_{0}$：両端から求められた状態量ベクトルを関連付ける役割をする接続行列

式(8)$_{1\sim3}$と中間支承の位置でたわみが零になる条件とより、格点2と4における変位成分と中間支承の支点反力とを未知量とする同次連立一次方程式が得られる。 従って、振動数方程式は、この方程式の係数行列$\mathbf{K}_e$を用いて次式で求まる。

$$\det \mathbf{K}_e(\bar{\lambda})=0 \tag{9}$$

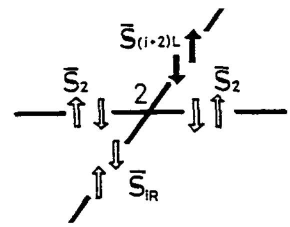
ここに、$\mathbf{K}_e(\bar{\lambda})$は$\bar{\lambda}$に従属する物理量を成分とする行列である。 従って、式(9)を満足する$\bar{\lambda}$が求まると、それらを用いて低次から高次までの固有円振動数と、それらに対応する自由振動モードとを算出することができる。

3．数値計算例

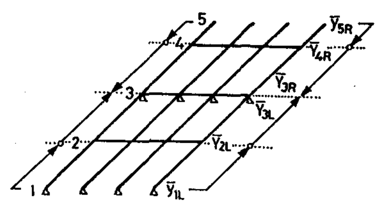
主桁間隔 3m、横桁間隔 10 mの全長 70 mの格子桁に対する固有円振動数を表－1に、固有振動モードの一部を図－4に示す。 主桁に関する曲げ剛性とねじり剛性の比を 0.51 とし、横桁に関する曲げ剛性を主桁のそれの 3/10 とした。また、横桁のねじり剛性を零と仮定した。

4．あとがき

本研究は、ＦＥＴＭ法とはさみ込み法を併用すれば、格子桁の自由振動特性を効率良く求めることができることを示した。この解析手法を用いると、より長大な鎖状の骨組構造物に対しても、還元法で問題となる数値誤差の発生を効果的に抑えてその自由振動解析に対処できるものと考えられる。



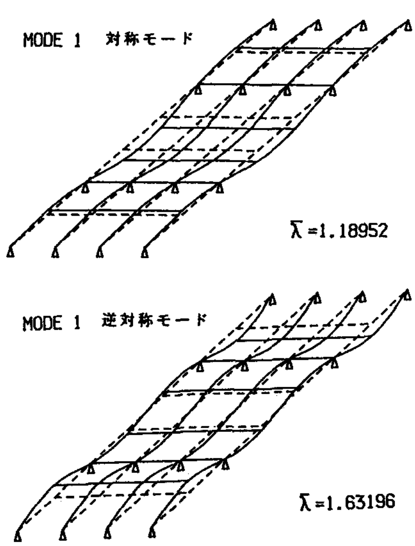
図－3　節点力ベクトル



図－4　解析用モデル

表－1　固有円振動数

次数	対称モード	逆対称モード
1	５．０７９８	９．５６１５
2	８．７６８１	１３．６０７６
3	１１．１７５９	１８．５５１５
4	１４．５７５０	２２．２２１５
5	２１．８０３５	２６．１４７２
6	２６．３９３７	３１．９１３２
7	３９．５３３９	３６．６２６３
8	４２．８６８９	３９．５１２８
9	４５．８５３３	３９．９４７２
10	４６．１４０１	４１．８１２４



図－5　固有振動モード

参考文献）

1）Ｅ．Ｃ．ペステル，Ｆ．Ａ．レキー共著：マトリクス弾性力学，ブレイン図書出版，pp. 148～151

2）神部俊一，田中善昭，甲斐龍二：はさみ込み法による多室断面鋼製箱桁の断面変形挙動解析，構造工学論文集VOL. 34A pp. 101 ～110

3）Clough.R.W, PENZIEN.J : Dynamics of Structures, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, pp. 346 ～351