

変断面板の線形座屈解析について

愛媛大学工学部 正 員 大賀 水田生
 愛媛大学大学院 学生員 ○川口 晃 一
 徳山 高 専 正 員 重松 恒 美

1. まえがき

本研究では一方向圧縮荷重を受け、載荷辺の板厚が変化する板構造の線形座屈解析を伝達マトリックス法を用いて行った。本法での格間伝達マトリックスは一方向圧縮荷重を受ける変断面板の状態量に関する一階の非線形偏微分方程式を数値積分することにより求められる。本法を用いて、種々の境界条件について座屈荷重を求め、変断面を階段状に近似し、一定厚の板構造に対する格間伝達マトリックスを用いて得られた結果との比較を行い、両格間伝達マトリックスの基本的特性を検討した。

2. 解析理論

変断面板に対する格間伝達マトリックス 一方向圧縮荷重を受け、載荷辺の板厚が変化する板要素(図-1)の応力-ひずみ関係式、ひずみ-変位関係式及び断面力の釣合式より板の状態量 $z = \{w, \psi_y, M_y, V_y, v, u, N_y, N_{yx}\}$ に関する連立偏微分方程式が得られる。ここで、載荷辺($x=0, a$)が単純支持されていることを考慮して、 x 方向(荷重方向)にフーリエ級数

$$w = \bar{w}(y) \sin \alpha x, \quad \alpha = m\pi/a; \quad m: \text{座屈モード} \quad \dots\dots\dots (1)$$

を導入することにより y 方向に関する一階の非線形連立常微分方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{\psi}_y \\ \bar{M}_y \\ \bar{V}_y \\ \bar{v} \\ \bar{u} \\ \bar{N}_y \\ \bar{N}_{yx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha^2 K_{21}}{\alpha_0 K_{22}} & 0 & \frac{\alpha_0 K_0}{K_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\alpha^2 K_{33}}{\alpha_0 K_0} & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{41} & 0 & \frac{\alpha^2 K_{12}}{\alpha_0 K_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{21}}{I_{22}} & \frac{\alpha_0^2 K_0}{I_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \frac{\alpha_0^3 K_0}{I_{33}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{86} & -\frac{\alpha I_{12}}{I_{22}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{\psi}_y \\ \bar{M}_y \\ \bar{V}_y \\ \bar{v} \\ \bar{u} \\ \bar{N}_y \\ \bar{N}_{yx} \end{pmatrix}$$

$$dz/dy = A(y) \cdot z_0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに

$$A_{41} = \frac{\alpha^4}{\alpha_0^3 K_0} (K_{11} - \frac{K_{12} K_{21}}{K_{22}} - \frac{\pi^2 k K}{b^2 \alpha^2}), \quad A_{86} = \frac{\alpha^2}{\alpha_0^3 K_0} (I_{11} - \frac{I_{12}^2}{I_{22}})$$

$$K_{11} = K_{22} = D, \quad K_{12} = K_{21} = \nu D, \quad K_{33} = (1-\nu)/2 \cdot D, \quad I_{ij} = 12/K_{ij} \cdot t^2(y)$$

$$D = E/(12(1-\nu^2)) \cdot t^3(y), \quad k: \text{座屈係数}, \quad \alpha_0, K_0: \text{規準となる} \alpha, K$$

上記の微分方程式を直接解くことが困難なため、本研究では次に示すRomberg数値積分法を用いて格間伝達マトリックス F_0 を求めた。

$$z = (1/2) \cdot (y_1 + y_{2+1} + b \cdot A_{2+1} \cdot y_{2+1}) z_0 = F_0 \cdot z_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに $y_1(x_0, b_1) = I \cdot z_0 = B_1 \cdot z_0, \quad y_2(x_1, b_1) = (I + b_1 A_1) z_0 = B_2 \cdot z_0$

$$y_m(x_n, b_l) = y_{m-2} + 2b_l \cdot A_{m-1} \cdot y_{m-1} = [B_{m-2} + 2b_l \cdot A_{m-1} \cdot B_{m-1}] z_0 = [B_m] z_0 \quad (l \geq m \geq 3)$$

$$b_l = b/l, \quad l = 2^1, 2^2, \dots: \text{分割数}$$

等断面板に対する格間伝達マトリックス 板厚が一定の場合、式(2)に示される変断面板に対する一階の非線形連立常微分方程式の係数マトリックスが定数となる。

$$dz/dy = A \cdot z_0 \quad A: 8 \times 8 \text{の係数マトリックス} \quad \dots\dots\dots (4)$$

上記の微分方程式の解は次式で与えられる。

$$z = e^{Ay} \cdot z_0 = F_y \cdot z_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに $e^{Ay} = I + (Ay) + (Ay)^2/2! + (Ay)^3/3! + \dots, \quad I: \text{単位マトリックス}$

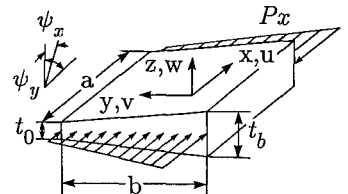


図-1 板要素

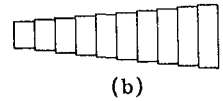
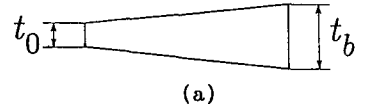


図-2 変断面の近似

3. 数値計算結果及び考察

上記の2つの格間伝達マトリックスを用いて、一方向圧縮荷重を受ける変断面板の座屈解析を行った。数値解析においては、非載荷辺の支持条件は単純-単純(S-S)、固定-固定(C-C)、単純-自由(S-F)及び固定-自由支持(C-F)の4種類、載荷辺の板厚比は $t_b/t_0=1.5, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ 、さらに板の形状比は $a/b=1.0, 2.0, 3.0$ とした。なお変断面板にRomberg数値積分法により求めた格間伝達マトリックスを用いる場合(図-2(a))をRomberg法、変断面を階段状に近似し、一定厚の板に対する格間伝達マトリックスを用いる場合(図-2(b))をステップ分割法と呼び、Romberg法では式(3)での分割パラメータを $I=1\sim 10$ 、ステップ分割法では板の分割数を $N=1\sim 40$ と変化させた。表-1, 2に両解法により得られた単純-単純支持の場合の解析結果を、図-3, 4に $a/b=1.0$ での解の収束状態の比較を示している。いずれの板厚比においても、分割数が多くなるとともに両解析法による解はある一定値に収束しており、 $I=10$ 及び $N=40$ での解は0.1%以内の誤差で一致している。しかしながら、ステップ分割法では板厚比が大きくなるとともに収束状態が悪くなっているのに対し、Romberg法においては板厚比の変化による収束状態の変化はあまり見受けられない。図-5, 6に固定-固定($a/b=1.0$)の場合の解の収束状態の比較を示している。Romberg法において解の収束状態が少し悪くなっているが、単純-単純の場合と同様、板厚比の変化による収束状態の変化はあまり見受けられない。非載荷辺の支持状態の解の収束状態に及ぼす影響については、Romberg法において固定-固定の場合、収束状態が少し悪くなっている以外、ほとんど変化はみられない。なお板の形状比の変化による収束状態の変化もほとんど見受けられない。

4. あとがき

本研究では、載荷辺の板厚が変化する変断面板の座屈解析をRomberg数値積分法により求めた格間伝達マトリックスを用いて行い、板厚を階段状に近似するステップ分割法の結果と比較した。その結果、本法は板厚比に関係なく安定した解を与えることが明らかになった。

表-1 座屈係数 (Romberg法) (S-S, $a/b=1.0$)

I	$t_b/t_0=1.5$		$t_b/t_0=2.0$		$t_b/t_0=3.0$		$t_b/t_0=4.0$		$t_b/t_0=5.0$	
	k	m	k	m	k	m	k	m	k	m
1	5.1222	1	7.3759	1	13.113	1	20.489	1	29.503	1
2	5.0255	1	6.9903	1	11.582	1	17.069	1	23.460	1
3	5.8208	1	8.0755	1	13.267	1	19.339	1	26.265	1
4	6.0476	1	8.3897	1	13.779	1	20.071	1	27.234	1
5	6.1065	1	8.4735	1	13.922	1	20.284	1	27.524	1
6	6.1216	1	8.4952	1	13.961	1	20.344	1	27.610	1
7	6.1255	1	8.5007	1	13.970	1	20.360	1	27.633	1
8	6.1265	1	8.5021	1	13.973	1	20.364	1	27.639	1
9	6.1267	1	8.5024	1	13.974	1	20.365	1	27.641	1
10	6.1267	1	8.5026	1	13.974	1	20.365	1	27.641	1

表-2 座屈係数 (ステップ分割法) (S-S, $a/b=1.0$)

N	$t_b/t_0=1.5$		$t_b/t_0=2.0$		$t_b/t_0=3.0$		$t_b/t_0=4.0$		$t_b/t_0=5.0$	
	k	m	k	m	k	m	k	m	k	m
4	6.1089	1	8.4274	1	13.641	1	19.560	1	26.142	1
8	6.1226	1	8.4853	1	13.896	1	20.168	1	27.254	1
12	6.1249	1	8.4950	1	13.940	1	20.280	1	27.473	1
16	6.1257	1	8.4983	1	13.955	1	20.317	1	27.548	1
20	6.1261	1	8.4999	1	13.962	1	20.335	1	27.582	1
24	6.1263	1	8.5007	1	13.965	1	20.344	1	27.600	1
28	6.1263	1	8.5013	1	13.968	1	20.350	1	27.611	1
32	6.1265	1	8.5015	1	13.969	1	20.353	1	27.618	1
36	6.1265	1	8.5019	1	13.970	1	20.356	1	27.623	1
40	6.1265	1	8.5019	1	13.971	1	20.358	1	27.626	1

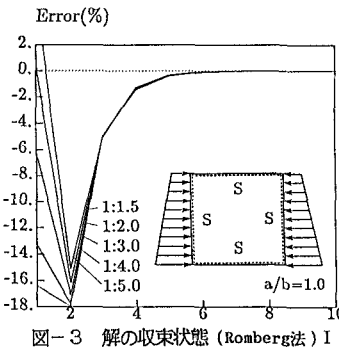


図-3 解の収束状態 (Romberg法) I

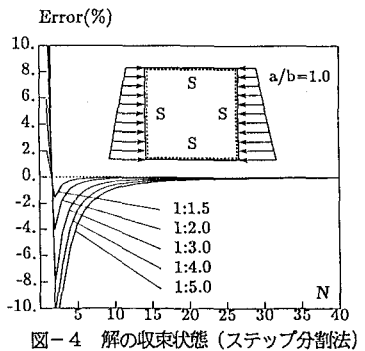


図-4 解の収束状態 (ステップ分割法)

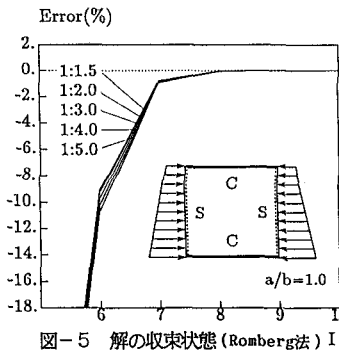


図-5 解の収束状態 (Romberg法) I

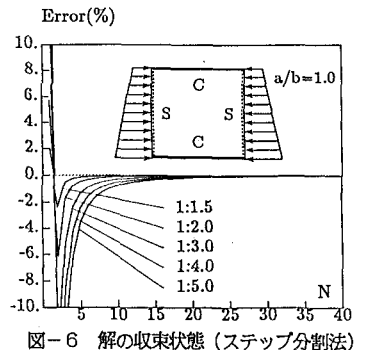


図-6 解の収束状態 (ステップ分割法)