

## 自重圧密方程式の差分法に関する一検討

## - 予測子・修正子法と陽解法の比較 -

徳島大学工学部

正 山上 拓男

(株)阪神コンサルタンツ

正 ○酒井 信介

1. はじめに 自重圧密方程式は強度の非線形性を有しており、厳密解を求めることは非常に困難である。このため、差分法などの数値解析に基づいて近似解を得なければならない。従来、この目的の差分法にはもっぱら陽解法が用いられてきた。しかし、陽解法は解の安定性に関する制約が課せられるのみならず、粘土地盤の初期状態に関する適応性に限界のあることが指摘されている。そこで著者らはこの問題を解決するために、Douglas・Jonesの予測子・修正子法（陰解法）に基づいて自重圧密方程式を展開し二、三の解析例を通してその適用性を確認した<sup>1)2)</sup>。本報告では、陽解法との比較により、予測子・修正子法の有用性を検討している。

2. 解析方法に関する比較 Gibsonらの自重圧密方程式を陽解法で展開した場合、(1)式に示す一般形が得られる<sup>3)</sup>。但、途中の展開式は紙数の都合により省略する：

$$e_{i,j+1} = e_{i,j} - \frac{(1+e_{i,j})^2 \Delta t}{r_w} \left\{ \alpha(e_{i,j}) \cdot \left\{ \frac{e_{i+1,j} - 2e_{i,j} + e_{i-1,j}}{\Delta z_0^2} \right\} + \frac{d}{de} [\alpha(e_{i,j})] \cdot \left\{ \frac{e_{i+1,j} - e_{i-1,j}}{2\Delta z_0} \right\}^2 - r_w' \beta(e_{i,j}) \cdot \left\{ \frac{e_{i+1,j} - e_{i-1,j}}{2\Delta z_0} \right\} \right\} \quad (1.a)$$

$$\alpha(e) = \frac{k(e)}{1+e} \frac{d\sigma'}{de} \quad (1.b) \quad \beta(e) = \frac{d}{de} \left( \frac{k(e)}{1+e} \right) \quad (1.c)$$

上式の記号の意味を表-1に示す。(1)式において、時刻 $j \cdot \Delta t$ における全ての間隙比 $e_{i,j}$ が既知の場合、未知量 $e_{i,j+1}$ を直接求めることが出来る。これに対し、予測子・修正子法でGibsonらの理論式を展開した場合、例えば修正子では以下に示す式に到達する：

$$-e_{i-1,j+1} + (2 + \frac{2\Delta z_0^2}{\Delta t} g_{1,c}) \cdot e_{i,j+1} - e_{i+1,j+1} = e_{i-1,j} - (2 - \frac{2\Delta z_0^2}{\Delta t} g_{1,c}) \cdot e_{i,j} + e_{i+1,j} - 2\Delta z_0^2 \cdot g_{2,c} \quad (2.a)$$

$$g_{1,c} = -\frac{r_w}{\alpha(e_{i,j+1/2}) \cdot (1+e_{i,j+1/2})^2} \quad (2.b) \quad g_{2,c} = \frac{1}{\alpha(e_{i,j+1/2})} \left[ r_w' \beta(e_{i,j+1/2}) - \frac{d}{de} [\alpha(e_{i,j+1/2})] \cdot \frac{(e_{i+1,j+1/2} - e_{i-1,j+1/2})}{2\Delta z_0} \right] \cdot \frac{(e_{i+1,j+1/2} - e_{i-1,j+1/2})}{2\Delta z_0} \quad (2.c)$$

ここに、式中の添字 $j+1/2$ は $j$ と $j+1$ の中間の時間差分点を意味する。その他の記号の意味は、表-1に示す通りである。(2.a)式において、未知量 $e_{i,j+1}$ を求める場合、式中には更に未知量 $e_{i-1,j+1}$ と $e_{i+1,j+1}$ の合計3個の未知量が含まれているため陽解法のように直接 $e_{i,j+1}$ を求めることはできない。そこで、全ての空間差分点 $i$ について(2)式を適用し、それらを連立させて解を得なければならない。また、予測子・修正子法により片面排水問題を解く場合、境界条件に起因して連立方程式を解く過程で反復計算が必要となる（詳細は、文献2)を参照）。この様に、予測子・修正子法は陽解法よりもかなり複雑である。その反面、予測子・修正子法はCrank・Nicolson形の陰解法なので、差分間隔選定に関する自由度が陽解法よりも大きい。したがって、陽解法よりも大きな差分間隔を用いて解析が可能であり、演算時間の短縮が期待出来る。

3. 適用例 今回行った解析は、初期層厚が5.0mで、定常状態の浸透流は存在しない軟弱地盤を想定した。そしてこの地盤において、初期体積比 $f_0$ が5.0, 5.5, 6.0, 6.5及び7.0の場合について、それぞれ両面排水と片面排水ふたつの場合における自重圧密過程を解析した。このとき、 $f - \log p$ 関係には三笠の標準圧密曲線( $c_0=0.8$ )<sup>4)</sup>を採用し、圧密係数は $c_v=0.003 \text{ m}^2/\text{day}$ の一定値とした。また自重圧密方程式はGibsonらの理論式を用い、計算はパーソナルコンピュータ (NEC PC9801-RX) で行った。以下解析結果について述べる：

初期体積比 $f_0$ が5.0の場合、予測子・修正子法と陽解法は、両面排水と片面排水いずれにおいても、同一かつ安定な解を与えた。ところが $f_0$ が5.5の問題では、予測子・修正子法及び陽解法共に、圧密の初期の段階で解の分布に不安定現象が生じた。更に $f_0$ が6.0, 6.5, 7.0と軟弱になるにしたがい、解の分布に生じている不安定現象の領域が広がって行った。なお、陽解法で $f_0=6.5$ の片面排水問題を解いた場合、解が発散し収束しないので、これ以上軟弱な問題の解析は不可能となった。図-1は、体積比の時間推移を表しており $f_0=7.0$ の両面排水問題を陽解法で解いた場合に生じた不安定現象の様相である。同様に、図-2は予測子・修正子法で

表-1 記号の説明

|                             |                       |
|-----------------------------|-----------------------|
| $e$ : 間隙比                   | $\Delta z_0$ : 空間差分間隔 |
| $z_0$ : 原始座標                | $\Delta t$ : 時間差分間隔   |
| $t$ : 経過時間                  | $i$ (添字) : 空間差分点      |
| $k$ : 透水係数                  | $j$ (添字) : 時間差分点      |
| $\sigma'$ : 有効応力            | $r_w$ : 水の単位重量        |
| $r_w'$ : 浮力を考慮した粘土の初期水中単位重量 |                       |

生じた不安定現象の様相である。そこで、解の分布に生じている不安定現象を安定な分布状態にするためにスムーズ化<sup>1)</sup>を行った。その結果、予測子・修正子法ではいずれの問題においても安定な解の分布が得られた。図-3は体積比の時間推移を表しており、 $f_0=7.0$ の両面排水問題を予測子・修正子法でスムーズ化を行いながら解析した結果である。同様に、図-4は予測子・修正子法で $f_0=7.0$ の片面排水問題をスムーズ化を行いながら解析した結果である。これに対し陽解法では、まず両面排水問題に付いて、 $f_0$ が5.5, 6.0及び6.5の問題はスムーズ化により安定な解の分布が得られた。しかし、 $f_0$ が7.0の問題においては、スムーズ化による解が得られず、安定な解の分布とならなかった。一方、片面排水問題では $f_0$ が5.5, 6.0共に安定な解が得られたが、前述したようにこれ以上軟弱な問題は解析することが出来なかった。

ここで、これらの問題を解析する際に要した演算時間に付いて簡単に述べておく。今回、いずれの問題を解析する場合も、陽解法と予測子・修正子法で可能な限り大きな差分間隔を選定した。その場合、前述した理由から予測子・修正子法は陽解法よりもかなり大きな差分間隔を選定することが出来た。解析に要した演算時間を表-2に示す。但、表-2において $f_0$ が5.5~7.0の問題はスムーズ化を行いながら解析した場合の結果である。これより、いずれの初期

表-2 演算時間の比較 (単位は秒)

| 初期体積比 $f_0$ |          | 5.0 | 5.5 | 6.0 | 6.5  | 7.0  |
|-------------|----------|-----|-----|-----|------|------|
| 両面排水問題      | 予測子・修正子法 | 13  | 135 | 216 | 524  | 751  |
|             | 陽解法      | 322 | 530 | 727 | 1190 | —    |
| 片面排水問題      | 予測子・修正子法 | 21  | 177 | 340 | 993  | 1369 |
|             | 陽解法      | 315 | 528 | 728 | —    | —    |

4. まとめ Gibsonらの自重圧密方程式を、Douglas・Jonesの予測子・修正子法と陽解法で解析し、両者の比較を行った。その結果、解の安定性・収束性に関して予測子・修正子法が陽解法よりも優れていた。また、演算時間に付いても、予測子・修正子法がかなり短いことが判明した。これより、自重圧密方程式の差分解法として、Douglas・Jonesの予測子・修正子法が圧倒的に優位であるとの結論に達した。

《参考文献》 1) 山上・酒井：第23回土質工学研究発表会，pp.351~352，1988。 2) 山上・酒井：第43回土木学会全国大会講演概要集，第三部，pp.346~347，1988。 3) Cargill, K., : Consolidation of Soft Layers by Finite Strain Analysis, MP-GL-82-3, Geot. Lab, USAEWES, Vicksburg, Miss., 1982。 4) 三笠正人：軟弱粘土の圧密，鹿島出版会，126p., 1963。

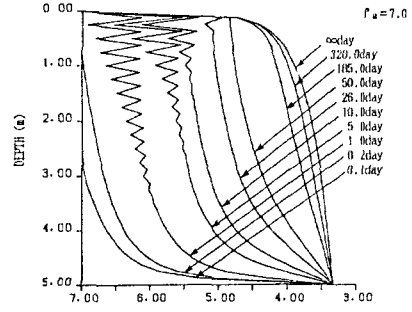


図-1 体積比の時間推移 (陽解法)

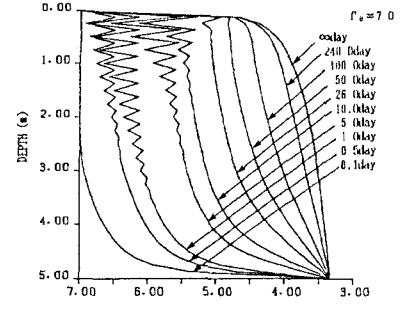


図-2 体積比の時間推移 (予測子・修正子法)

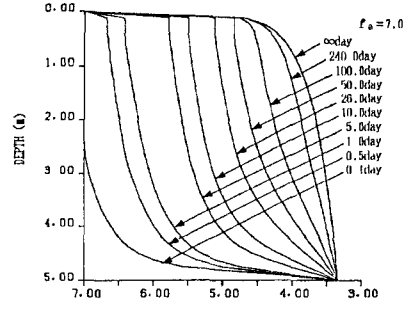


図-3 スムーズ化の結果 (両面排水)

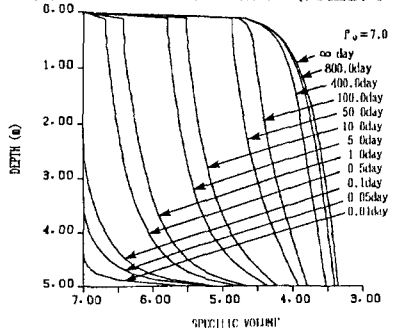


図-4 スムーズ化の結果 (片面排水)