

F. E. M. による開水路二次元流の数値解析

広島大学工学部 正員 常松 芳昭
 中電技術コンサルタント 正員 金本 満
 滋賀県 正員 ○ 上坂 昇治

1. まえがき：本文の目的は水深に比べて幅の広い河川の拡幅部における流れを平面二次元流モデルを適用して数値解析を行い、その有効性を明らかにすることである。手始めに、ここでは拡幅部を有する実験水路における測定結果と有限要素法による数値解析結果との比較を行なったのでこれについて報告する。

2. 平面二次元流の基礎式の離散化：レイノルズの運動方程式と非圧縮性流体の連続式に対して、圧力は静水圧分布を仮定し、鉛直方向流速は水平方向流速に比べて非常に小さいとみなし、鉛直方向に積分を行なうと(1)～(3)式に示すような平面二次元流の基礎方程式¹⁾を得る。

$$\begin{aligned} \cdot X \text{ 方向の運動方程式} \quad & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = g(I_x - S_x) + A_H \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\cdot Y \text{ 方向の運動方程式} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = g(I_y - S_y) + A_H \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\cdot \text{連続式} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u} d)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} d)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここに、図-1に示すように、X軸はX方向の平均勾配 I_x に平行に、Y軸はY方向の平均勾配 I_y に平行に水面付近にとり、また、Z軸はXY平面に直角に上向きにとっている。 $\bar{U}$ 、 $\bar{V}$ はXY方向のZ方向に関して平均化された流速、 η はXY平面からの水位変動量、 d は水深、 g は重力加速度、 S_x 、 S_y はX、Y方向の摩擦勾配、 A_H は水平渦動粘性係数を表わす。

(1)～(3)式を空間変数に対しては、重み付き残差法の一様であるガラーキン法を用いて離散化し、時間変数に対しては陽的差分法の一様である2 Step-Lax-Wendroff法を用いて離散化すると次の有限要素法の計算式を得る。

1 step

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}^n) \quad (4)$$

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{v}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{v}}^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}(\bar{\mathbf{v}}^n) \quad (5)$$

$$\mathbf{M} \bar{\eta}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{M} \bar{\eta}^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}(\bar{\eta}^n) \quad (6)$$

2 step

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}^n - \Delta t \mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (7)$$

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{v}}^{n+1} = \mathbf{M} \bar{\mathbf{v}}^n - \Delta t \mathbf{F}(\bar{\mathbf{v}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (8)$$

$$\mathbf{M} \bar{\eta}^{n+1} = \mathbf{M} \bar{\eta}^n - \Delta t \mathbf{F}(\bar{\eta}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (9)$$

ここに、 $\mathbf{M}$ は質量行列、 $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{V}}$ 、 $\bar{\eta}$ は未知量ベクトル、 $\mathbf{F}$ は未知量 $\bar{\mathbf{U}}$ 、 $\bar{\mathbf{V}}$ 、 $\bar{\eta}$ で構成されるベクトルを表わす。なお、解析領域内の有限要素は三角形一次要素を採用する。

3. FEMによる数値計算上の問題点：ここでは、FEMを使うに際して問題となる大規模な行列計算に要する計算機の記憶容量と計算時間の節約、壁面の取り扱い方、及び、計算を安定化するための上下流端の境界条件について次のように対処した。

a) 行列の集中化²⁾：質量行列 $\mathbf{M}$ に対して行列の集中化を行ない、大規模な逆行列の計算を進める。ただし、連続式の右辺の質量行列に対しては計算の安定化のために次の修正集中行列を用いる。

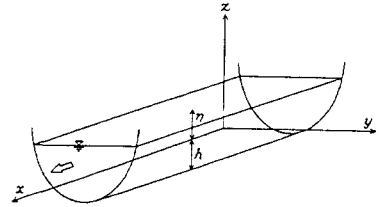


図-1 座標系

$$\tilde{\mathbf{M}} = e \mathbf{M} + (1 - e) \mathbf{M}$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{M}}$ は修正集中行列、 $\mathbf{M}$ は集中行列、 e は補正係数を表わす。

b) 壁面の条件：本解析においては、横断方向に十分な要素分割を行えないので、壁面の領域内部に及ぼす影響を和らげるために、壁面に『すべり流速』³⁾を認める。これは、壁面と見なす解析領域の境界上にある節点の流速ベクトルを、境界に対して法線方向の成分を持たない流速ベクトルに変換する方法による。

c) 上下流端の境界条件の設定方法：境界条件の与え方としては下流端で流速と水深、上流端で流量を規定する方法がある。しかし、この方法では計算の初期に発生する水位変動が時間経過とともに解析領域全体に拡がり収束に時間を要する難点がある。そこで、本研究では上流端の境界条件として、下流端と同様にして直接、節点の流速と水深を規定することにより流量を与えることにした。この様な境界条件を採用する場合、上流端において理論的な不整合からくる水位の変動が生じる恐れがあるが、これは、上流端において流下方向に長い要素を採用し、領域全体への影響を小さくする事によって解消される。

4. 拡幅水路流れの実測と計算結果：図-2の実験水路において流速分布と水深を測定した結果と実測値を境界条件として数値解析を行なった結果を図-3～6に示す。流速は河床から2 cmの高さに設置した電磁流速計で測定し、水深はポイントゲージにより測定した。図-3と図-4を比較すれば実際の流れに見られる死水域は数値解析では再現されていないことが分かる。また、水面形についてみると、図-5と図-6より実測と数値解析結果との間に死水域によるエネルギー損失が表われないことによる差異も見られる。この原因としては、まず、実験水路の流れは、幅30 cmに対して平均的な水深が約10 cmであり平面二次元流の前提条件を十分満足していないこと、さらに、対象としている水の流れは非常にレイノルズ数の高い乱流であるから、3-b)で述べた『すべり流速』は漸拡部の領域境界である壁面における流速ベクトルの方向を変換する際に流下方向の成分の影響を強く反映し、結果的に死水域を生じさせない方向に流速変換していることが考えられる。

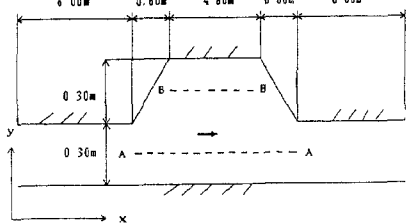


図-2 実験水路図

見られる。この原因としては、まず、実験水路の流れは、幅30 cmに対して平均的な水深が約10 cmであり平面二次元流の前提条件を十分満足していないこと、さらに、対象としている水の流れは非常にレイノルズ数の高い乱流であるから、3-b)で述べた『すべり流速』は漸拡部の領域境界である壁面における流速ベクトルの方向を変換する際に流下方向の成分の影響を強く反映し、結果的に死水域を生じさせない方向に流速変換していることが考えられる。

5. あとがき：以上、FEMで拡幅流れのシミュレーションを試みたが、領域の境界としての壁面の取り扱い方法の改善など、今後さらに検討すべき課題は多い。 **参考文献：**1) 荒木正夫、富所五郎：開水路合流部の流れの三次元数値解析法，土木学会年次学術講演会講演概要集，第2部，pp.217-218，1985。2) 川原睦人：有限要素法流体解析，日科技連，1984。3) 川原睦人，吉田裕：新体系土木工学，有限要素法，技報堂，1983。

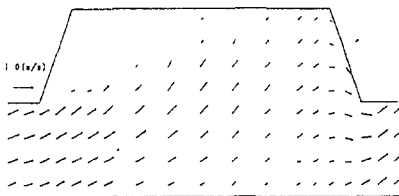


図-3 流速ベクトル図(実測値)

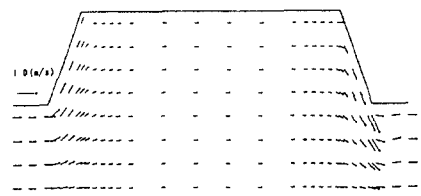


図-4 流速ベクトル図(計算値)

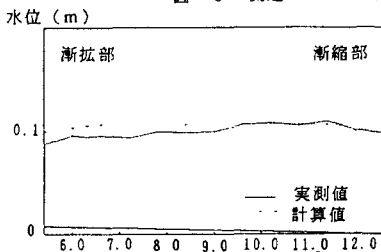


図-5 縦断面A-Aの水面形 上流端からの距離(m)

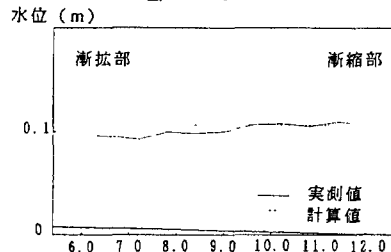


図-6 縦断面B-Bの水面形 上流端からの距離(m)