4点Implicit法を用いた河川網の洪水流解析法

中電技術コンサルタント　正　員　○　金本　満
広島大学　工学部　正　員　常松芳昭
広島大学　大学院　学生員　台信達観

1．まえがき：本報告は河川網における漸変非定常流の基礎式を4点Implicit法により離散化し，これをNewton-Raphson法を用いて解く場合の河川網のシステムモデルをグラフ理論を用いて系統的に定式化したものである．

2．単一河川における表示方法：1本の河川をグラフの枝に対応させ，任意の枝はN個の断面に分割されているものとする．4点Implicit法により離散化された運動方程式をF_i（h_i, q_i, h_{i+1}, q_{i+1}）＝0，連続方程式をG_i（h_i, q_i, h_{i+1}, q_{i+1}）＝0とする[1]．ただし，h，qは次時刻ステップの水位，流量であり，iは断面番号($i=1,\cdot\cdot,N-1$)である．これらの非線形代数方程式はNewton-Raphson法によって解かれるが，その場合，河川網への拡張が容易なように，上・下流端における境界条件式を除いた2N－2個の方程式を(1)式のように表示しておく．なお，Δは収束計算を行なう上でのkステップとk＋1ステップの未知水理量の差を表す．

$$
\left[\begin{array}{cc|cc|ccc|ccc}
\frac{\partial G_1}{\partial h_1} & 0 & \frac{\partial G_1}{\partial q_1} & 0 & \frac{\partial G_1}{\partial h_2} & 0\cdots\cdots & 0 & \frac{\partial G_1}{\partial q_2} & 0\cdots\cdots & 0 \\
\frac{\partial F_1}{\partial h_1} & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial h_2} & 0\cdots\cdots & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial q_2} & 0\cdots\cdots & 0 \\
\hline
0 & \frac{\partial G_{N-1}}{\partial h_N} & 0 & \frac{\partial G_{N-1}}{\partial q_N} & 0\cdots\cdots & 0 & \frac{\partial G_{N-1}}{\partial h_{N-1}} & 0\cdots\cdots & 0 & \frac{\partial G_{N-1}}{\partial q_{N-1}} \\
0 & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial h_N} & 0 & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial q_N} & 0\cdots\cdots & 0 & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial h_{N-1}} & 0\cdots\cdots & 0 & \frac{\partial F_{N-1}}{\partial q_{N-1}} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial G_2}{\partial h_2}\;\frac{\partial G_2}{\partial h_3} & & & \frac{\partial G_2}{\partial q_2}\;\frac{\partial G_2}{\partial q_3} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{\partial F_2}{\partial h_2}\;\frac{\partial F_2}{\partial h_3} & \ddots & & \frac{\partial F_2}{\partial q_2}\;\frac{\partial F_2}{\partial q_3} & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \frac{\partial G_{N-2}}{\partial h_{N-2}} & \frac{\partial G_{N-2}}{\partial h_{N-1}} & & \frac{\partial G_{N-2}}{\partial q_{N-2}} & \frac{\partial G_{N-2}}{\partial q_{N-1}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \frac{\partial F_{N-2}}{\partial h_{N-2}} & \frac{\partial F_{N-2}}{\partial h_{N-1}} & & \frac{\partial F_{N-2}}{\partial q_{N-2}} & \frac{\partial F_{N-2}}{\partial q_{N-1}}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\Delta h_1 \\ \hline \Delta h_N \\ \hline \Delta q_1 \\ \hline \Delta q_N \\ \hline \Delta h_2 \\ \vdots \\ \Delta h_{N-1} \\ \hline \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_{N-1}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
-G_1 \\ -F_1 \\ \hline -G_{N-1} \\ -F_{N-1} \\ \hline -G_2 \\ -F_2 \\ \vdots \\ -G_{N-2} \\ -F_{N-2}
\end{array}\right]
\qquad (1)
$$

(1)式の行列およびベクトルを破線で示してあるように，部分行列，部分ベクトルに分割すれば，(2)式のように表示される．ただし，以後，下付の～はベクトルを表すことにする．

3．河川網への拡張：いま，e本の枝，n個の節点を持つ河川網を考える．このような河川網に(2)式を適用すると(3)式のように表示できる．

$$
\begin{bmatrix}
U_1 & 0 & V_1 & 0 & U_3 & V_3 \\
0 & U_2 & 0 & V_2 & U_4 & V_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & U_5 & V_5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta \underset{\sim}{X}_1 \\ \Delta \underset{\sim}{X}_N \\ \Delta \underset{\sim}{Y}_1 \\ \Delta \underset{\sim}{Y}_N \\ \Delta \underset{\sim}{X} \\ \Delta \underset{\sim}{Y}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\underset{\sim}{B}_1 \\ -\underset{\sim}{B}_{N-1} \\ -\underset{\sim}{B}
\end{bmatrix}
\quad (2)
\qquad
\begin{bmatrix}
P_1 & 0 & R_1 & 0 & P_3 & R_3 \\
0 & P_2 & 0 & R_2 & P_4 & R_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & R_5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta \overset{+}{\underset{\sim}{h}} \\ \Delta \overset{-}{\underset{\sim}{h}} \\ \Delta \overset{+}{\underset{\sim}{q}} \\ \Delta \overset{-}{\underset{\sim}{q}} \\ \Delta \underset{\sim}{h} \\ \Delta \underset{\sim}{q}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\underset{\sim}{G}_1 \\ -\underset{\sim}{G}_{N-1} \\ -\underset{\sim}{G}
\end{bmatrix}
\quad (3)
$$

ただし，$a=1,\cdot\cdot,5$，N_j $(j=1,\cdot\cdot,e)$ を枝 j の断面数とすれば，

$$P_a=\begin{bmatrix} U_a^1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_a^e \end{bmatrix},\quad R_a=\begin{bmatrix} V_a^1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_a^e \end{bmatrix},\quad \Delta\overset{+}{\mathbf{h}}=\begin{bmatrix} h_1^1, & \cdot\cdot, & h_1^e \end{bmatrix}^T\quad \Delta\overset{-}{\mathbf{h}}=\begin{bmatrix} h_{N_1}^1, & \cdot\cdot, & h_{N_e}^e \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta\overset{+}{\mathbf{q}}=\begin{bmatrix} q_1^1, & \cdot\cdot, & q_1^e \end{bmatrix}^T\quad \Delta\overset{-}{\mathbf{q}}=\begin{bmatrix} q_{N_1}^1, & \cdot\cdot, & q_{N_e}^e \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta\mathbf{h}=\begin{bmatrix} h_2^1, & \cdot\cdot, & h_{N_1-1}^1, & \cdot\cdot\cdot, & h_2^e, & \cdot\cdot, & h_{N_e-1}^e \end{bmatrix}^T,\quad \Delta\mathbf{q}=\begin{bmatrix} q_2^1, & \cdot\cdot, & q_{N_1-1}^1, & \cdot\cdot\cdot, & q_2^e, & \cdot\cdot, & q_{N_e-1}^e \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G}_1=\begin{bmatrix} G_1^1, & F_1^1, & \cdot\cdot, & G_1^e, & F_1^e \end{bmatrix}^T,\quad \mathbf{G}_{N-1}=\begin{bmatrix} G_{N_1-1}^1, & F_{N_1-1}^1, & \cdot\cdot, & G_{N_e-1}^e, & F_{N_e-1}^e \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} G_2^1, & F_2^1, & \cdot\cdot\cdot & G_{N_1-2}^1 & F_{N_1-2}^1 & \cdot\cdot\cdot\cdot & G_2^e & F_2^e & \cdot\cdot & G_{N_e-1}^e & F_{N_e-1}^e \end{bmatrix}^T$$

である．ここで，$\Delta\overset{+}{\mathbf{h}}$は各枝上流側の水位の変化量，$\Delta\overset{-}{\mathbf{h}}$は各枝下流側の水位の変化量を表す．さらに，水位の連続条件が考慮できるように，節点で定義される水位の変化量$\Delta\mathbf{H}=[\Delta H_1,\cdot\cdot,\Delta H_n]^T$を導入し，入・出連結行列を用いると，

$$\Delta\overset{+}{\mathbf{h}}=\overset{+}{D}{}^T\Delta\mathbf{H}\quad,\quad \Delta\overset{-}{\mathbf{h}}=\overset{-}{D}{}^T\Delta\mathbf{H} \tag{4}$$

のように表示できる[2]．ただし，$\overset{+}{D}$：出連結行列，$\overset{-}{D}$：入連結行列，T：転置を表す．

さらに，境界条件の導入のために，各変数をソース(＋)，中間ノード(０)，シンク(－)に分割して次のように表示する．

$$\overset{+}{D}=\begin{bmatrix} \overset{+}{D}_+ \\ \overset{+}{D}_0 \\ \overset{+}{D}_- \end{bmatrix},\quad \overset{-}{D}=\begin{bmatrix} \overset{-}{D}_+ \\ \overset{-}{D}_0 \\ \overset{-}{D}_- \end{bmatrix},\quad \Delta\mathbf{H}=\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{H}_+ \\ \Delta\mathbf{H}_0 \\ \Delta\mathbf{H}_- \end{bmatrix} \tag{5}$$

これらを(３)式に代入して，$\overset{+}{D}_-=0$，$\overset{-}{D}_+=0$を考慮し展開すると，

$$\begin{aligned} &P_1\overset{+}{D}_+\Delta\mathbf{H}_++P_1\overset{+}{D}_0\Delta\mathbf{H}_0+R_1\Delta\overset{+}{\mathbf{q}}+P_3\Delta\mathbf{h}+R_3\Delta\mathbf{q}=-\mathbf{G}_1 \\ &P_2\overset{-}{D}_0\Delta\mathbf{H}_0+P_3\overset{-}{D}_-\Delta\mathbf{H}_-+R_2\Delta\overset{-}{\mathbf{q}}+P_4\Delta\mathbf{h}+R_4\Delta\mathbf{q}=-\mathbf{G}_{N-1} \\ &P_5\Delta\mathbf{h}+R_5\Delta\mathbf{q}=-\mathbf{G} \end{aligned} \tag{6}$$

となる．また，収束計算の過程の$k+1$ステップの境界条件は以下のように表せる[3]．

$$\mathbf{F}_1=\overset{+}{D}_+\overset{+}{\mathbf{q}}-\mathbf{F}(t)=\mathbf{0}\quad,\quad \mathbf{F}_2=\overset{+}{D}_0\overset{+}{\mathbf{q}}-\overset{-}{D}_0\overset{-}{\mathbf{q}}=\mathbf{0}\quad,\quad \mathbf{F}_3=\mathbf{H}_--\mathbf{f}(t)=\mathbf{0} \tag{7}$$

ただし，第１式はソースの条件式であり，$\mathbf{F}(t)$は流量ハイドログラフ，第２式は中間ノードにおける流量の連続条件式，第３式はシンクにおける条件式であり，$\mathbf{f}(t)$は水位ハイドログラフ，tは時刻を表す．ここで，(７)式をTaylor展開し，単位行列をEとすれば，

$$\overset{+}{D}_+\Delta\overset{+}{\mathbf{q}}=-\mathbf{F}_1\quad,\quad \overset{+}{D}_0\Delta\overset{+}{\mathbf{q}}-\overset{-}{D}_0\Delta\overset{-}{\mathbf{q}}=-\mathbf{F}_2\quad,\quad E\Delta\mathbf{H}_-=-\mathbf{F}_3 \tag{8}$$

のようになる．ただし，(８)式において，右辺のベクトルは未知水理量の逐次近似値を代入して得られたものである．したがって，(６)，(８)式を連立すれば，$2\Sigma N_j-2e+n$個の連立方程式$(j=1,\cdot\cdot,e)$が得られ，これをくり返し収束計算することにより，次時刻ステップの諸量を求めることができる．

４．あとがき；以上，４点Implicit法による河川網洪水流のグラフ理論的な定式化方法を提案したが，今後は実河川網に適用し，本手法の有効性を検討する予定である．

参考文献；1)土木学会編：水理公式集．　2)常松・金本：広島大学工学部研究報告，38-1.　3)前出 2).