

エネルギー原理による骨組構造物の材料非線形たわみ解析法に関する基礎的研究

愛媛大学工学部 正会員 大久保 禎二
 観音寺市役所 正会員 牧 野 耕 司
 愛媛大学大学院 学生員 〇林 英 範

1. まえがき

著者らはこれまでに、エネルギー原理および非線形計画法の手法を用いて非線形材料よりなるトラス、はり構造物、剛節骨組構造物などの部材力および格点変位を決定する方法の研究を行い、その成果を発表しているが^{1)~4)}、本研究ではエンゲッサーの第一定理により、非線形材料よりなる剛節骨組構造物の全コンプリメンタリーエネルギーを最小化することにより未知部材端力を決定する解析アルゴリズムを用いて任意の着目点の変位をも能率的に決定する方法の基礎的な研究を行った結果について述べるものである。

2. エンゲッサーの第一定理

エンゲッサーが1889年に文献 5) で発表した論文により次の定理が成り立つ。

$$\partial U^* / \partial P_i = \Delta_i \quad (1)$$

ここに、 U^* ：構造物の最小化された全コンプリメンタリーエネルギー

P_i ：構造物の着目点 i における Δ_i 方向の集中荷重、 Δ_i ：着目点 i における変位

この定理は材料の線形性、非線形性を問わず全ての材料について成り立つものであり、構造物の最小化された全コンプリメンタリーエネルギー U^* を着目点の着目方向の力で偏微分することにより着目点の着目方向の変位が求められることになる。

3. エンゲッサーの第一定理にもとづく骨組構造物の非線形たわみ解析法

式(1)の数値計算法として、本研究では次の方法により骨組構造物の任意点の任意方向のたわみの計算を行った。

まず、荷重載荷状態における未知部材端力 X を式(2)により、各可動節点の力の釣合条件 $g(X)$ のもとで全コンプリメンタリーエネルギー U^* を最小化して決定するとともに、最小化された U^* を U_0^* とする。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Find} & X, \text{ Which} \\ \text{minimize} & U^*(X) \\ \text{Subject to} & g_j(X) = 0 \quad (j=1 \cdots, q) \end{array} \right\} \quad (2) \quad \begin{array}{l} \text{ここに、} \quad q: \text{可動節点における力の} \\ \text{つり合い条件式の総数} \end{array}$$

次に、原荷重に加えてたわみの着目点 i の着目方向に仮想荷重 δP_{i1} を載荷し、再び式 (2)により U^* を最小化することにより求めた U^* を $U_{P_{i1}}^*$ 、また、たわみの着目方向と反対の方向に仮想荷重 δP_{i2} を載荷し、式(2)により U^* を最小化することにより求めた U^* を $U_{P_{i2}}^*$ とすると、変位 Δ_i は δP_i の載荷方法により次の3種類の差分式により近似的に求めることができる。

$$(A) \quad \text{前進差分の場合} \quad \Delta_i = (U_{P_{i1}}^* - U_0^*) / \delta P_{i1} \quad (3)$$

$$(B) \quad \text{後退差分の場合} \quad \Delta_i = (U_0^* - U_{P_{i2}}^*) / (-\delta P_{i2}) \quad (4)$$

$$(C) \quad \text{中央差分の場合} \quad \Delta_i = (U_{P_{i1}}^* - U_{P_{i2}}^*) / 2 \delta P_{i1} \quad (5)$$

ただし、(C) における $U_{P_{i1}}^*$ 、 $U_{P_{i2}}^*$ は、 $\delta P_{i1} = -\delta P_{i2}$ として求めたものである。

4. 変位法によるたわみの解析

2.、3. で述べたエネルギー法によるたわみの解析法の妥当性を検討するため、変位法による解との比較を行った。変位法による構造物の非線形たわみ解析は次の方法により行った。

① まず骨組構造物の各部材を長さ l 、 $l = 10\text{cm}$ の微小部材要素に分割し、各微小要素の断面に作用する曲げモーメント M および軸力 N を仮定し、仮想軸剛性 EA を式(6)より、仮想曲げ剛性 EI を式(7)より決定する。ここで、 ϵ_n は軸力 N のみにより生ずる断面のひずみ量、 ϵ_n 、 ϵ_s はそれぞれ N 、 M が作用する断面の釣合条件および断面変形に関する平面保持の条件を満たす部材の上縁および下縁ひずみである。

$$EA = N / \epsilon_n \quad (6) \quad EI = M \cdot H / (\epsilon_s - \epsilon_n) \quad H: \text{断面の高さ} \quad (7)$$

- ② 各微小部材要素ごとにEA, EIを用いて剛性行列を作成し、これらを集成して構造物全体の剛性行列を作成し、全体剛性方程式を解くことにより各微小要素端における変位およびN, Mを求める。
- ③ ②で求めたN, Mを新たな仮定値として、N, MおよびEA, EIが一定値に収束するまで①, ②の計算を繰り返すことにより最終的な変位を決定する。

5. 解析例および解析結果の考察

本研究で提案している式(2)~(5)の解析法の信頼性を検討するため、種々の剛結骨組構造物を図-2に示す3種類の非線形材料A, B, Cについて解析を行ったが、ここでは図-1に示す門形ラーメン(材料A)の解析例を表-1に示す。

仮想荷重 δP の大きさが本解析法および変位法による解との相対誤差におよぼす影響をみると、前進差分では δP が0.1~1.5%と大きくなるに従い0.5~3.0%と大きくなっている。一方、後退差分ではすべての場合において前進差分の場合より相対誤差が小さく、 δP が0.5%付近で最小の相対誤差を得、0.1%程度となっている。また、中央差分では δP の大きさにあまり関係なく、0.42%あるいは0.82%の相対誤差となっている。また、他の解析例においても同様の結果が得られている。

以上の検討の結果をまとめると、本研究の方法により前進、後退、中央差分いずれの場合も仮想荷重の大きさが1%程度までは、変位法による解との相対誤差が0.0~2.3%程度と、ほぼ正確な変位が得られること、後退差分の方が前進差分より相対誤差が小さく、仮想荷重の大きさを0.5%とする場合には、相対誤差が0.1%程度と、きわめて正確な解が得られることなどが明らかとなった。

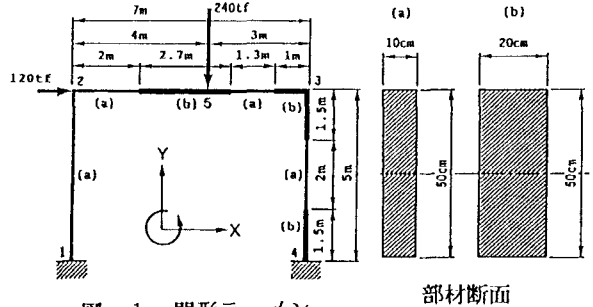
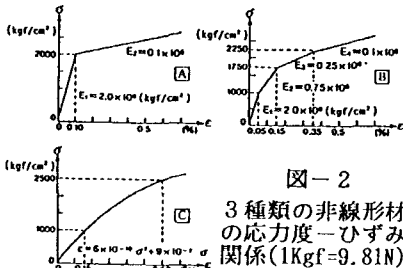


表-1 エネルギー法による解析結果と変位法による解析結果との比較
(解析モデル: 門形ラーメン(材料A))

変位 番号	変位 方向	仮想荷重 δP	相対誤差 R.D.(%)	前進差分	後退差分	中央差分	変位法による 変位
2	水	0.1%	0.12tf	3.459 R.D.(%)	3.452 0.31	3.455 0.42	3.441cm
		0.25%	0.31tf	3.464 R.D.(%)	3.446 0.16	3.455 0.41	
		0.5%	0.61tf	3.473 R.D.(%)	3.438 0.10	3.456 0.42	
	平	1.0%	1.2tf	3.491 R.D.(%)	3.420 0.61	3.456 0.42	
		1.5%	1.8tf	3.509 R.D.(%)	3.403 1.1	3.456 0.43	
5	鉛	0.1%	-0.24tf	-2.432 R.D.(%)	-2.426 0.68	-2.429 0.82	-2.409cm
		0.25%	-0.6tf	-2.438 R.D.(%)	-2.421 0.47	-2.420 0.82	
		0.5%	-1.2tf	-2.446 R.D.(%)	-2.412 0.12	-2.429 0.83	
	直	1.0%	-2.4tf	-2.464 R.D.(%)	-2.396 0.56	-2.430 0.85	
		1.5%	-3.6tf	-2.481 R.D.(%)	-2.379 1.2	-2.430 0.88	
2	曲	2)	-0.1tfm	-1.129 R.D.(%)	-1.129 0.40	-1.129 0.42	-1.124 $\times 10^{-2}$ rad
		2)	-0.5tfm	-1.131 R.D.(%)	-1.128 0.29	-1.129 0.42	
		2)	-1.0tfm	-1.132 R.D.(%)	-1.126 0.16	-1.129 0.42	
	げ	2)	-1.5tfm	-1.134 R.D.(%)	-1.125 0.03	-1.129 0.42	
		2)	-2.0tfm	-1.135 R.D.(%)	-1.123 0.10	-1.129 0.42	
		2)					

- 1) R.D.: 変位法による解との相対誤差(%)
- 2) $P_0 = 0$
- 3) 着目点の位置の番号は図-1に同一の番号で示す。

- [参考文献] 1) 大久保 他, 土・学・論, 第374号 2) Ohkubo, S. et al., Computers & Structures, Vol. 27, No. 1
3) 大久保 他, 土・学・論, 第398号 4) 大久保 他, 土・学・論, 第416号 5) F. Engesser, Ueber
statisch unbestimmte Träger..., Z. Architekten Ing., vol. 35, Hannover, 1889