

変動荷重を受けるトラス構造物のエネルギー原理による材料非線形解析法について

愛媛大学工学部 正会員 ○大久保 禎二
宇部興産(株) 正会員 和多田 康男
山口県庁 西村 一隆

1. まえがき

材料の非線形性を考慮した骨組構造物の解析をエネルギー原理及び数値計画法の手法を用いて行う方法については、すでに大久保らにより発表されているが^{1)~4)}、本研究では、トラス構造物に先行荷重がかかり各部材にすでに軸力が作用している状態で、さらに荷重が加わった場合に生ずる軸力の増分をエネルギー原理により求める解析法について基礎的な研究を行ったものである。

2. エネルギー原理に関する一仮定

通常、最小コンプリメンタリーエネルギーの原理における部材 i の断面のコンプリメンタリーエネルギー密度 β_i は、応力度およびひずみが図-1に示す σ_i および ε_i の場合は OAB の面積、また、 $\sigma_i + \Delta\sigma_i$ および $\varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i$ の場合は OCD の面積で定義されている。本研究では「構造物がすでに荷重 P により先行応力度 σ_i およびひずみ ε_i を受けている場合、新たに載荷される増分荷重 ΔP に対して、 σ_i および ε_i を原点として図-1に示す BED のコンプリメンタリーエネルギー密度 β_i のみを考慮しても、増分荷重 ΔP に対して最小コンプリメンタリーエネルギーの原理が成り立つ」との仮定を設定する。

3. 増分荷重 ΔP による部材力の増分の解析法

2. でのべた仮定、および文献1で著者らの提案している材料の非線形性を考慮したトラス構造物の解析法を用いて、 ΔP によるトラス構造物の各部材力の増分 ΔN を次のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題を解くことにより決定する。すなわち、

Find X , which

$$\text{minimize } \Pi_c(X) = \sum_{i=1}^n \Pi_{ci}(X) \quad (1)$$

$$\text{subject to } g = \Delta P - CX = 0 \quad (2)$$

ここに、 $X = [\Delta N_1, \dots, \Delta N_n]^T = [X_1, \dots, X_n]^T$

$g = [g_1(X), \dots, g_m(X)]^T$: 可動節点における ΔP および ΔN に関する釣合条件式

C : 力の変換マトリックス, n : 部材数, m : 自由度の数

式(1)の Π_{ci} は2. で設定した仮定により次式より計算される。

$$\Pi_{ci} = \int_{V_i} \beta_i dV = \beta_i \times V_i \quad (3)$$

$$\beta_i = \int_0^{\varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i} \sigma_i(\sigma) d\sigma - \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i(\sigma) d\sigma - \sigma_i(\sigma_i) \times \Delta\sigma_i \quad (4)$$

上式の $\Delta\sigma_i$ は $\Delta\sigma_i = \Delta N_i / A_i$ (A_i : 部材 i の断面積) と ΔN_i の関数であるので、 Π_{ci} は ΔN_i 、すなわち X の関数となる。また、 σ_i 、 ε_i は定数、 V_i は部材 i の体積である。

上記の式(1)~(4)のコンプリメンタリーエネルギー最小化問題を文献1)でのべている逐次二次計画法とLPの手法により解く。なお解を決定する場合に必要な Π_c の X_i 、すなわち ΔN_i に関する偏微係数 $\partial \Pi_c / \partial X_i$ は次式により簡単に求めることができる。

$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial X_i} = \frac{\partial \Pi_{ci}}{\partial X_i} = \Delta\varepsilon_i \ell_i \quad (5)$$

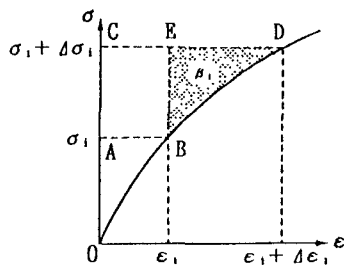


図-1 応力度の増分によるコンプリメンタリーエネルギー密度

4. 解析例および解析結果の考察

上記の解析法の妥当性を検討するため、種々の不静定トラスの解析を行った。非線形材料として図-2に示すA, B, C 3種類の非線形材料を考慮し、荷重を2, 3, 4等分して各分割荷重 ΔP について式(1)~(4)により解析を行い、各 ΔP による部材力の増分を加え合わせた部材力と、荷重を分割しないで解析を行った場合の部材力との比較を行った。解析例として図-2の材料Bよりなる図-3に示す21部材トラスの荷重を3, 4等分した場合の解析結果、および荷重を分割しないで解析した場合の結果との比較を表-1に示す。荷重を分割した場合と分割しなかった場合の解の相対誤差は0.000~0.006%であり、両解法による解は極めてよく一致しており、2. で設定した仮定が正確に成り立つことが明らかとなった。

5. 結 論

本研究により、トラス構造物の変動荷重 ΔP (増分荷重)によって生ずる応力度の増分 $\Delta \sigma$ およびひずみの増分 $\Delta \epsilon$ は、各部材の既存の応力度およびひずみを原点とし、新たに加わる増分荷重により生ずる応力およびひずみの増分のみを考慮して図-1の β に示すようにコンプリメンタリーエネルギー密度を計算し、 ΔP による全コンプリメンタリーエネルギーを、 ΔP および部材力の増分 ΔN のみを考慮した可動節点の釣合条件式のもとで最小化することにより、極めて正確に求められることが明らかとなった。

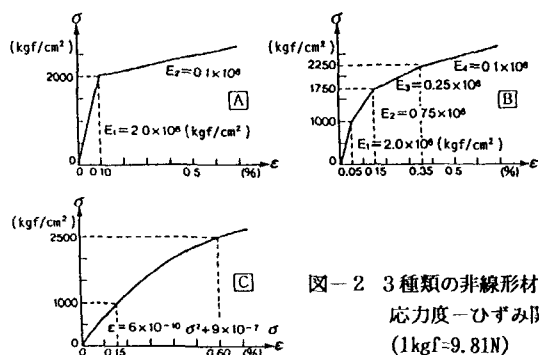


図-2 3種類の非線形材料の
応力度-ひずみ関係
(1kgf=9.81N)

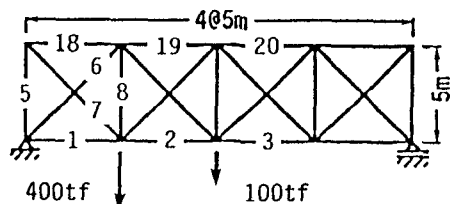


図-3 21部材トラス

表-1 21部材トラス(材料B)の荷重3等分割、4等分割による解と分割しない場合の解との比較¹⁾

部材 番号	荷重Pを 分割しない 場合 の軸力	荷重3等分割						荷重4等分割					
		軸力の増分 ²⁾			軸力増分 の合計	相対誤差	軸力の増分 ²⁾				軸力増分 の合計	相対誤差	
		P/3	(P/3)+P/3	(2P/3)+P/3			P/4	(P/4)+P/4	(2P/4)+P/4	(3P/4)+P/4			
1	174.14	58.12	57.70	58.32	174.14	0.001%	43.76	43.58	43.27	43.52	174.13	0.006%	
2	315.08	102.04	106.12	106.92	315.09	0.001%	74.86	78.14	85.35	76.73	315.08	0.001%	
3	224.03	73.64	74.03	76.35	224.03	0.000%	55.41	55.59	54.81	58.22	224.03	0.000%	
5	-175.86	-58.54	-58.97	-58.35	-175.86	0.002%	-43.74	-43.92	-44.23	-43.98	-175.87	0.006%	
6	-246.27	-82.20	-81.60	-82.48	-246.27	0.001%	-61.89	-61.63	-61.19	-61.54	-246.26	0.006%	
7	248.70	82.79	83.39	82.51	248.70	0.002%	61.85	62.11	62.55	62.20	248.72	0.006%	
8	189.22	60.17	63.82	65.24	189.23	0.004%	43.63	46.72	53.62	45.25	189.21	0.005%	
18	-175.86	-58.54	-58.97	-58.35	-175.86	0.002%	-43.74	-43.92	-44.23	-43.98	-175.87	0.006%	
19	-334.92	-114.62	-110.55	-109.74	-334.91	0.002%	-87.64	-84.36	-77.15	-85.77	-334.92	0.001%	
20	-225.97	-76.36	-75.97	-73.65	-225.97	0.001%	-57.09	-56.91	-57.69	-54.28	-225.97	0.000%	

1) 各軸力および軸力の増分の単位はtfである 2) ()内はすでにかかっている荷重を示す

[参考文献] 1) 大久保 他, 土・学・論, 第374号 2) Ohkubo, S. et al., Computers & Structures, Vol. 27, No. 1
3) 大久保 他, 土・学・論, 第398号 4) 大久保 他, 土・学・論, 第416号