FEM－BEMによる2次元き裂解析

岡山大学大学院　学生員　○　井上大三
岡山大学工学部　正　員　　広瀬壮一
岡山大学工学部　正　員　　谷口健男

<u>1.まえがき</u>　近年、土木構造物、特に鋼橋におけるき裂発生、進展の報告が数多くなされている。これは局部的な応力集中が原因であると考えられ、その力学挙動を解明するために様々な研究が行われている。中でも、汎用性、表現の多様性など数々の利点を持つ有限要素法を用いた数値解析が多用されている。しかし、有限要素法ではき裂解析を行う上で問題となる、き裂先端近傍の応力の特異性を表現することは困難である。そこで、有限要素法に代わる解析手法として境界要素法を取り上げる。境界要素法は、有限要素法で必要とする要素分割等の前処理を必要とせず、節点数を少なくすることが出来るため方程式系が小さくなるという利点を持っている。しかし、鋼橋のような複雑な構造体に対してはその適用が困難となり、汎用性に欠ける面がある。そこで、本研究では有限要素法、境界要素法各々の欠点を相互に解消させる結合解法について提案する。具体的には、き裂先端部に境界要素法を適用し、周辺の応力特異性のない部分に有限要素法を適用させる。（図1）

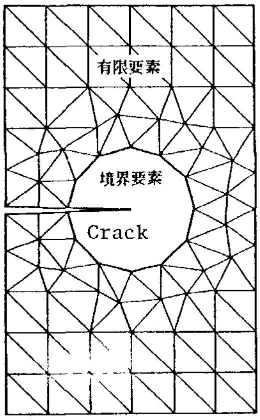


図1　結合解法における一般的モデル

<u>2.基本設計</u>　結合解法における基本的な考え方としては、有限要素と境界要素の共有する節点では変位は同一であり、力の伝達は作用反作用の法則により逆向きに等価な力が載荷されるという連続条件によるものとする。

<u>(1).境界要素法によるき裂解析</u>　き裂上では通常同一座標に2つの節点が存在するように二重節点として扱う必要があるが、本研究ではき裂先端方向に向かって右側を（＋）、左側を（－）側として、y_i^+点とy_i^-点の変位および表面力の差、$u^+(y_i)-u^-(y_i)$、$t^+(y_i)-t^-(y_i)$を点y_iにおける変位、表面力として評価する。なお、$u^+(y_i)-u^-(y_i)$は点y_iにおけるき裂開口変位となっている。（図2）さらに、一般的には、ほとんどの場合き裂上の表面力は0であるので、$t^+(y_i)-t^-(y_i)=0$とした。要素は有限要素法との結合を考慮して、2次アイソパラメトリック要素を用いるが、き裂上ではき裂開口変位を未知量とするため、積分核の特異性が強く各要素の両端の節点において積分が収束しないため、2次アイソパラメトリック要素および線形要素を用いることが出来ない。そこで、き裂上では一定要素を用いる。2次アイソパラメトリック要素と一定要素の接合は、き裂開口部において2次アイソパラメトリック要素の端節点と隣会う一定要素の節点との変位が同一であるという近似により行う。

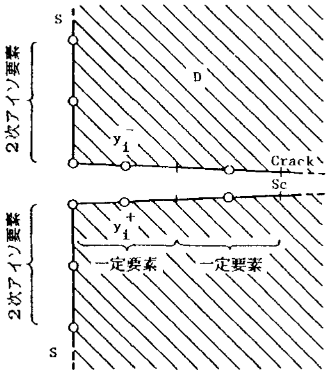


図2　き裂およびき裂開口部の要素と節点

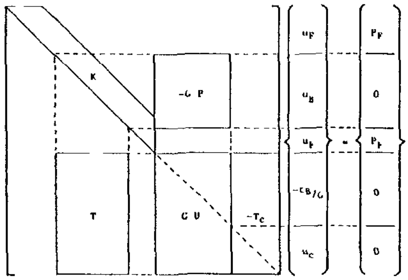
また、き裂上に一定要素を用いると、き裂先端部では開口変位を正確に表現することが出来ない。しかし、一般にき裂先端の開口変位は$\sqrt{\varepsilon}$（εはき裂先端からの距離）なる挙動を示すことが知られている。そこで、き裂先端部要素に対しては$\sqrt{\varepsilon}$なる形状関数を用いて開口変位を表現する。

<u>(2).節点力と表面力</u>　有限要素法による定式化では節点に作用する力は節点力であるが、境界要素法では表面力であるという違いのため、節点力と表面力の相互変換を行う必要がある。これは、有限要素法における節点力の定義と、境界要素法における表面力の定義により、次式で示される。

$$P^c = -\int_{\Gamma} N^c M^m \, d\Gamma \, t^m \qquad (1)$$

ただし、P^cは有限要素上の共有節点cに作用する節点力、t^mは共有節点cを含む境界要素に作用する表面力、Γは共有境界、N^c、M^mは有限要素、境界要素各々における形状関数である。有限要素は6節点三角形アイソパラメトリック要素、境界要素は3節点2次アイソパラメトリック要素を用いるため、N^cとM^mは共有境界上で全く同様の形となる。

(3).全体系方程式とその解法　全体系方程式は有限要素法による方程式系、境界要素法による方程式系、および節点力と表面力の変換式を連立することにより構成される。



（2）

ただし、［K］は有限要素法による剛性マトリックス、［T］、［U］は境界要素法による共有節点に対する二重層核、および一重層核であり、［T_c］はき裂上の節点に対する二重層核である。［P］は表面力を節点力に変換する変換マトリックスである。{u_B} は共有境界上にある節点変位、{u_F} はそれ以外の有限要素領域の節点変位であり、{u_c} は境界要素領域のき裂開口変位である。{P_F} は有限要素に作用する既知節点力である。ここでは、［T］と［U］の数値的なオーダーをそろえるため、一重層核にはせん断弾性係数Gを掛けている。このため、{t_B} は {t_B／G} となり、［P］にもGが掛かることになる。

（2）式に示される連立1次方程式の係数行列は全体としては非対称となっているが、うまく節点番号付けを行うとFEM部は対称かつ疎、BEM部は非対称かつ密となる。この性質はFEM－BEM法では共通であることを利用して、ここでは次に示すような変則解法を提案する。

FEM部、BEM部を分離して、前者に対しては対称半バンド行列として2次元配列を用い、それ以外の部分については非対称行列として、データは1次元配列を用いるスカイラインタイプとする。すなわち、バンドマトリックス法と非対称スカイライン法の混合法である。これにより、必要とされる容量の大幅削減および演算時間の節約が可能となる。

なお、上述したような形式の係数行列を得るための一般的な節点番号付けは今日までには提案されていないが、Gipps-Poole-Stockmeyerの方法を修正し利用することによって、同様の非零要素配列を得ることが出来る。

3.あとがき　き裂解析を行う上で、有限要素法と境界要素法の結合解法は非常に有利である。境界要素法単独のき裂解析も有限要素法によるそれと比べて有利な面も多々あるが、有限要素法との結合により汎用性の向上が期待できる。

なお、有限要素領域の節点番号付けに関しては今後の研究により改善の余地がある。

《参考文献》1）鷲津久一郎、他　”有限要素法ハンドブック　I基礎編”　培風館（1981）

2）C.A.ブレビア　”境界要素法入門”　培風館