

クノイド波の第3次近似解とshoaling・屈折解析への応用

愛媛大学工学部

正員 山口正隆

橋本仁志

愛媛大学大学院

戸塚耕造

○学生員

飯野剛弘

1. まえがき: 著者らは沿岸水理現象の解析にクノイド波の第2次近似解を使用してきた。しかし、近似度の不足により波特性を過大評価する傾向にあることから、第3次近似解の特性を検討する必要性が生じてきた。佐伯らはChappelearの第3次近似解に計算の誤りがあることを指摘しているが、その結果が妥当であるかどうか疑わしい。そこで、本研究では数式処理プログラム「REDUCE」を利用して、Chappelearの第3次近似解を求め、水粒子の軌跡や屈折変形の計算を行うとともに、2次近似解との比較により高次項の影響を検討する。

2. クノイド波の第3次近似解: 「REDUCE」を利用した計算によれば、若干の印刷ミスを除いてChappelearの計算が正しく、佐伯らの計算が誤りであることがわかった。正しい解を第1定義および第2定義の波速 c と定常化された流速 u' について示すと、つぎのようである。

$$c^1/\sqrt{gD}=1+L_3+L_0(1-e)+5L_0L_3(1-e)+(1/3)L_0^2\{5+4\kappa^2-5(1+\kappa^2)e\}+10L_0L_3^2(1-e)+(1/25)L_0^3\{81+146\kappa^2+58\kappa^4-(81+169\kappa^2+81\kappa^4)e\}+3L_0^2L_3\{5+4\kappa^2-5(1+\kappa^2)e\} \quad (1)$$

$$c^0/\sqrt{gD}=1+L_3+L_0(1-e)+5L_0L_3(1-e)+L_0^2\{2+\kappa^2-(3+\kappa^2)e+e^2\}+10L_0L_3^2(1-e)+9L_0^2L_3\{2+\kappa^2-(3+\kappa^2)e+e^2\}+(1/25)L_0^3\{116+131\kappa^2+38\kappa^4-(216+184\kappa^2+41\kappa^4)e+25(5+2\kappa^2)e^2-25e^3\} \quad (2)$$

$$u'/\sqrt{gD}=1+L_3+L_0\kappa^2\text{sn}^2\gamma x+\{L_0^2(1+\kappa^2)+5L_0L_3\}\kappa^2\text{sn}^2\gamma x+L_0^2\kappa^4\text{sn}^4\gamma x-(y/D)^2\{(3/4)L_0^2\{\kappa^2-2(1+\kappa^2)\kappa^2\text{sn}^2\gamma x+3\kappa^4\text{sn}^4\gamma x\}+(1/5)L_0^3\{7+19\kappa^2+7\kappa^4\}+9L_0^2L_3\{1+\kappa^2\}+10L_0L_3^2\}\kappa^2\text{sn}^2\gamma x+\{(9/5)L_0^3\{1+\kappa^2\}+9L_0^2L_3\}\kappa^4\text{sn}^4\gamma x+(6/5)L_0^3\kappa^6\text{sn}^6\gamma x-(y/D)^2\{(3/4)L_0^3\kappa^2(1+\kappa^2)+(15/4)L_0^2L_3\kappa^2+\{(3/2)L_0^3(-1+\kappa^2-\kappa^4)-(15/2)L_0^2L_3(1+\kappa^2)\}\kappa^2\text{sn}^2\gamma x+\{-(15/4)L_0^3(1+\kappa^2)+(45/4)L_0^2L_3\}\kappa^4\text{sn}^4\gamma x+(15/2)L_0^3\kappa^6\text{sn}^6\gamma x\}+(3/16)(y/D)^4L_0^3\{-\kappa^2(1+\kappa^2)+(2+13\kappa^2+2\kappa^4)\kappa^2\text{sn}^2\gamma x-15(1+\kappa^2)\kappa^4\text{sn}^4\gamma x+15\kappa^6\text{sn}^6\gamma x\} \quad (3)$$

ここに、 D : 水深, κ : 楕円関数の母数, sn : Jacobiの楕円関数, L_0 (Chappelearの原論文における L_1-L_3), L_3 : 微小展開パラメータ, $\theta=\gamma(x-ct)=(2K/L)(x-ct)$, $\gamma=\sqrt{3}L_0/2D$ および L : 波長, である。

3. 水粒子の軌跡および質量輸送速度: $t=0$ における水粒子の初期位置 (x_0, z_0) からの水平変位および鉛直変位をそれぞれ $\xi(t)$ および $\zeta(t)$ とすると、ある特定の水粒子の速度(Lagrange速度)は、その位置におけるEuler速度に等しい。そこで、水平水粒子速度を $u=(c-u')$ 、鉛直水粒子速度を w とすると、次式が成立する。

$$dx/dt=u(x, z), \quad dz/dt=w(x, z), \quad x=x_0+\xi(t), \quad z=z_0+\zeta(t) \quad (4)$$

式(4)にクノイド波理論の結果を代入したのち、 $\xi(t)$ 、 $\zeta(t)$ が小さいという仮定のもとに、 L_0 と L_3 の次数に応じて逐次的に解を求めれば、第1定義の理論に基づく水粒子の軌跡が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} x^1 = & \{T\sqrt{gD}/(2K)\}\{L_0\{ea-E(a)\}+5L_0L_3\{ea-E(a)\}+(1/3)L_0^2\{[1-\kappa^2+(2+5\kappa^2)e]a+3(-2-\kappa^2+e)E(a)+3\{ea-E(a)\}\kappa^2\text{sn}^2a\}-(3/4)(y_0/D)^2L_0^2\kappa^2\text{sn}^2a\text{cn}^2a+10L_0L_3^2\{ea-E(a)\}+L_0^2L_3\{3\{1-\kappa^2+(2+5\kappa^2)e\}a+9(-2-\kappa^2+e)E(a)+9\{ea-E(a)\}\kappa^2\text{sn}^2a\}+(1/75)L_0^3\{[60+10\kappa^2-70\kappa^4+(43+307\kappa^2+243\kappa^4)e]a+\{-(303+447\kappa^2+103\kappa^4)+200(\kappa^2+1)e\}E(a)+75e^2a^2-150eaE(a)+75E^2(a)-\kappa^2-1\}\kappa^2\text{sn}^2a\text{cn}^2a+25\{[1-\kappa^2+(5+8\kappa^2)e]a+3(-3-2\kappa^2+e)E(a)]\kappa^2\text{sn}^2a+3\kappa^4\text{sn}^4a\text{cn}^2a+75\{ea-E(a)\}\kappa^4\text{sn}^4a\}-(15/4)(y_0/D)^2L_0^2L_3\kappa^2\text{sn}^2a\text{cn}^2a+(1/20)(y_0/D)^2L_0^3\{[16-24\kappa^2+8\kappa^4-15\kappa^2e]a+(-16+31\kappa^2-16\kappa^4)E(a)-(22+7\kappa^2-15e)\kappa^2\text{sn}^2a\text{cn}^2a-9\kappa^4\text{sn}^4a\text{cn}^2a+30(1+\kappa^2)\{ea-E(a)\}\kappa^2\text{sn}^2a-45\{ea-E(a)\}\kappa^4\text{sn}^4a\}+(3/16)(y_0/D)^4L_0^3\{-(1+\kappa^2)\kappa^2\text{sn}^2a\text{cn}^2a+3\kappa^4\text{sn}^4a\text{cn}^2a\}\} \quad (5) \\ z = & z_0 - \{T\sqrt{gD}/(\sqrt{3}L_0K)\}(y_0/D)\{(3/4)L_0^2\kappa^2\text{sn}^2a+(3/16)L_0^3(y_0/D)^2\{2(1+\kappa^2)\kappa^2\text{sn}^2a-3\kappa^4\text{sn}^4a\}+(3/4)L_0^3(2+\kappa^2-e)\kappa^2\text{sn}^2a+(15/4)L_0^2L_3\kappa^2\text{sn}^2a+(3/2)L_0^3\{ea-E(a)\}\kappa^2\text{sn}^2a\text{cn}^2a\} \quad (6) \end{aligned}$$

ここに、 $a=2\kappa t/T$, $E(a)=\int_0^a \text{dn}^2 u du$: JacobiのE関数, $y_0=D+z_0$ である。また、水平方向変位を1周期平均すれば、質量輸送速度分布が得られる。

$$U_m/\sqrt{gD}=(1/3)L_0^2\{-1+\kappa^2+2(2-\kappa^2)e-3e^2\}+3L_0^2L_3\{-1+\kappa^2+2(2-\kappa^2)e-3e^2\}+(2/15)L_0^3\{-6-\kappa^2+7\kappa^4+2(13+7\kappa^2-$$

$$7\kappa^4)e^{-20(1+\kappa^2)e^2} + (2/5)(y_0/D)^2 L_0^3 \{-2+3\kappa^2-\kappa^4+2(1-\kappa^2+\kappa^4)e\}$$

図-1と図-2はそれぞれ第1定義に基づくChapleearの第3次および第2次近似解による水粒子の軌跡および質量輸送速度の鉛直分布を図示したものである。第2次近似解では、質量輸送速度は鉛直方向に一様であるのに対し、第3次近似解では、水面に近づくほど大きな値となつて、鉛直分布をもつ。また、第3次近似解による質量輸送速度が第2次近似解によるものより大きいことに対応して、第3次近似解による水粒子も水平方向に大きく移動する。

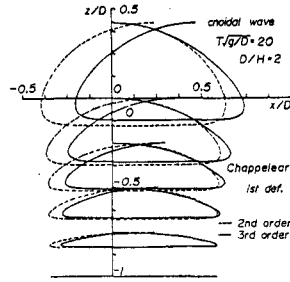


図-1

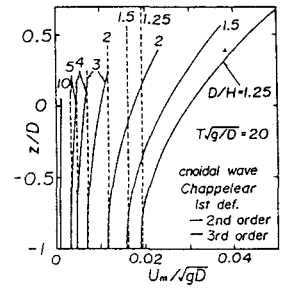


図-2

4. 実験結果との比較：図-3は波速および水平水粒子速度の鉛直分布の理論曲線を土屋らの実験結果と比較したものであり、第2定義のクノイド波の第3次近似解(C-3-2)あるいは第2定義のStokes波の第4次近似解(S-4-2)が最も実験結果に近い値を与える。また、クノイド波の第3次近似解(C-3-1, C-3-2)は第2次近似解(C-2-1, C-2-2)よりかなり小さい。

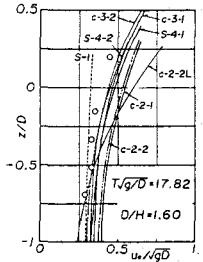
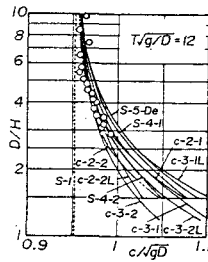


図-3

5. shoaling・屈折解析：第2定義の有限振幅波理論に基づくshoalingの関係式は $F=F_0$, $\sigma=\sigma_0$ ----(8)で与えられる。ここに、F:エネルギーフラックス, σ :角振動数, であり, '0'は深海を意味する。一方, 沿岸方向に一樣な流れVが存在するとき, 第2定義の有限振幅波理論による屈折変形の計算式は S_{xy} をradiation stressとした次式である。

$$S_{xy} = F \cos \theta (\sin \theta / c) = F_0 \cos \theta_0 (\sin \theta_0 / c_0) ,$$

$$\sigma + k_0 \sin \theta_0 V = \sigma_0 , \quad k \sin \theta = k_0 \sin \theta_0 \quad \text{----(9)}$$

ここに、c:波速, k:波数, θ :波向, である。深海ではStokes波の第4次近似解, 浅海ではクノイド波の第3次近似解で波特性を評価すれば, 式(8)および式(9)からshoalingあるいは屈折変形の理論解を得ることができる。図-4は第2定義によるクノイド波のshoalingを示したものである。周知のように, 有限振幅波のshoaling特性は D/L_{0A} のみならず, 沖波波形勾配 H_0/L_{0A} にも依存し, 浅海域では同一の D/L_{0A} に対し, H_0/L_{0A} が大きいほど, H/H_0 および L/L_{0A} の値が大きい。また, 第2次近似解がより大きい H/H_0 および L/L_{0A} を与える。図-5は第2定義によるクノイド波の屈折変形を示したものである。有限振幅波の波長が屈折変形に伴って微小振幅波の場合ほど減少しないことから, 波向変化量も小さくなる。また, 第2次近似解による H/H_0 , L/L_{0A} および θ は第3次近似解によるものより大きい。

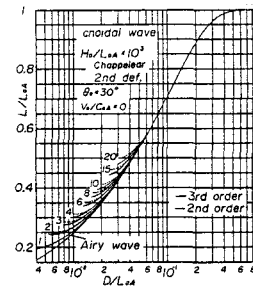
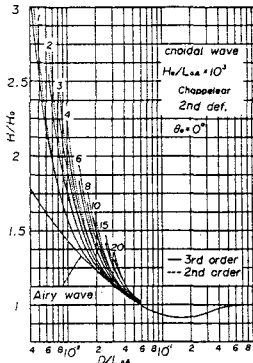


図-4

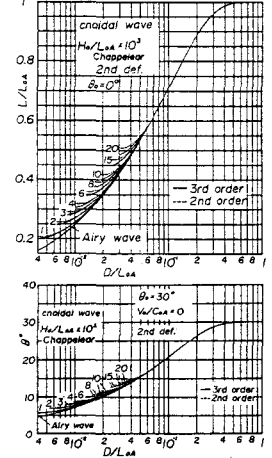
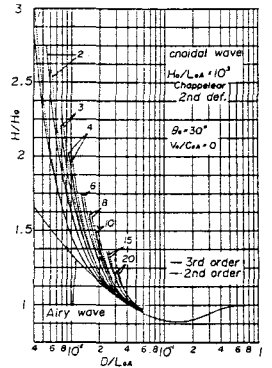


図-5